



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

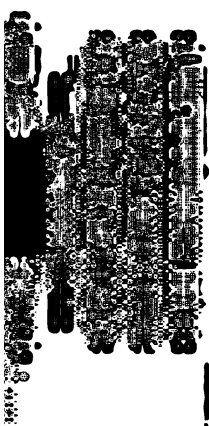
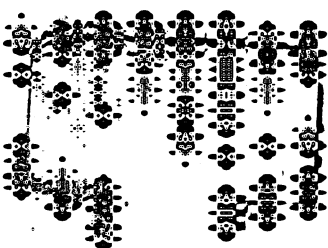
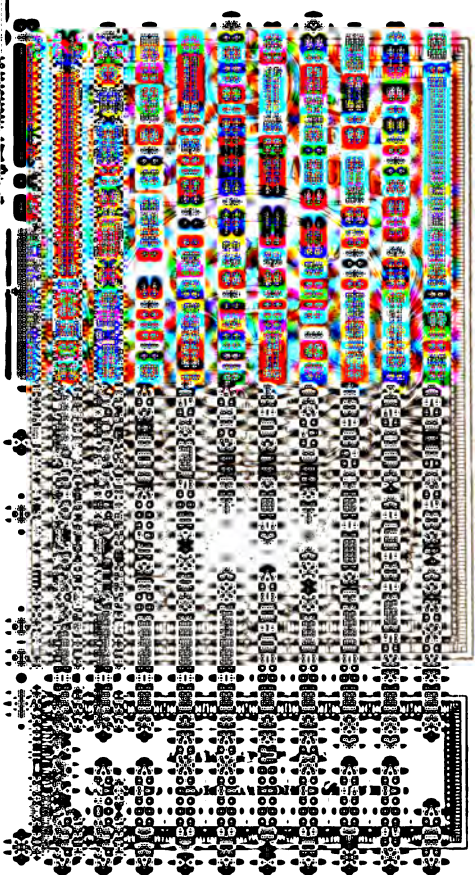
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



Mathematics

QA

303

.D57

PROBLÈMES
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE
ET DE MÉCANIQUE.

2574

Alexandre Zivod
Dieu, Théodore Désiré, 1811-1877

PROBLÈMES
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE
ET
DE MÉCANIQUE.

CONCOURS D'AGRÉGATION.

ANNÉES 1841 A 1851.

PARIS.

LEIBER, LIBRAIRE-ÉDITEUR,
RUE DE SEINE-SAINT-GERMAIN, 13.

1863

Prof. Alex. Ziwet
12-21-1922

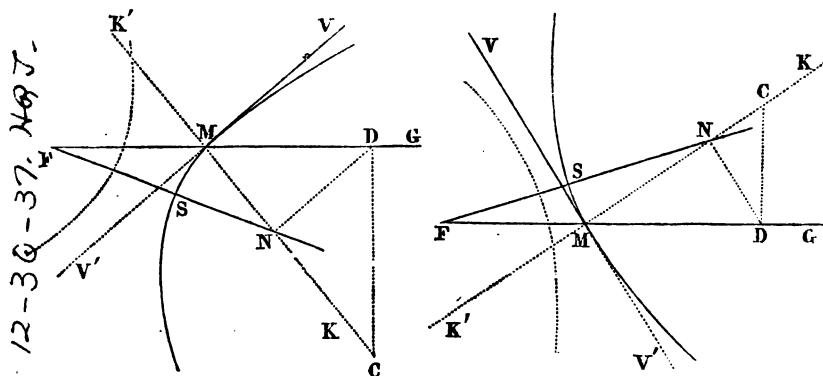
CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1841;

PAR M. DIEU,
Agrége, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome X.)

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer le mouvement d'un point matériel repoussé par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.



F étant le point d'où émane la force répulsive, M la position du mobile, et MV la direction de sa vitesse à l'époque à partir de laquelle on compte le temps, il est évident qu'il ne sortira pas du plan FMV.

Nous prendrons F pour pôle, FM pour axe polaire, et nous désignerons par ω , ρ et v les coordonnées et la vitesse du mobile à la fin du temps t , par ρ_0 et v_0 les valeurs initiales de ρ et v , par α l'angle FMV, compris entre 0 et π , enfin par μ la force répulsive rapportée aux unités de masse et de distance:

D.

413310

(2)

Le principe des forces vives donne

$$(1) \quad \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}{dt^2} = a - \frac{2\mu}{\rho},$$

en posant $\nu_0^2 + \frac{2\mu}{\rho_0} = a$ pour abréger, et celui des aires,

$$(2) \quad \rho^2 d\omega = c dt,$$

c étant déterminée en fonction des données ρ_0 , ν_0 et α par l'équation

$$c = \rho_0 \nu_0 \sin \alpha.$$

L'élimination de dt , entre les équations (1) et (2), conduit à

$$c^2 \cdot \left(\frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{d\omega} \right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2} = a - \frac{2\mu}{\rho};$$

en résolvant cette équation par rapport à $d\omega$, puis en intégrant, on trouve

$$\omega - \beta = \pm \arccos \left(\frac{\frac{\mu}{c} + \frac{c}{\rho}}{\sqrt{a + \frac{\mu^2}{c^2}}} \right),$$

β étant la constante amenée par cette dernière opération; et l'on tire de là

$$(3) \quad \rho = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{\frac{ac^2}{\mu^2} + 1} \cdot \cos(\omega - \beta) - 1}.$$

Afin que $\omega = 0$ donne $\rho = \rho_0$, il faut qu'on ait

$$\cos \beta = \frac{c^2 + \rho_0 \mu}{\rho_0 \sqrt{ac^2 + \mu^2}},$$

(3)

et nous prendrons pour β le plus petit arc positif qui satisfasse à cette équation.

L'équation (3) représente une hyperbole dont le point F est un des foyers ; le mouvement s'effectue sur la branche opposée à ce foyer, puisque ρ a initialement la valeur positive ρ_0 qui répond à un point de cette branche ; et l'on voit facilement que la droite qui va du foyer F à l'autre fait avec FM, dans le sens de ω , un angle égal à $2\pi - \beta$ ou à β , suivant que $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ou $< \frac{\pi}{2}$.

A et B désignant les demi-axes de cette hyperbole, on a

$$\frac{B^2}{A} = \frac{c^2}{\mu}, \quad \frac{A^2 + B^2}{A^2} = \frac{ac^2}{\mu^2} + 1,$$

d'où

$$A = \frac{\mu}{a}, \quad B = \frac{c}{\sqrt{a}},$$

et l'on pourrait la construire d'après ces formules ; mais il est préférable d'employer le théorème de Newton, par lequel on a $N = R \cos^2 \varphi$, N étant la normale, R le rayon de courbure, et φ l'angle compris entre la normale et le rayon vecteur. Pour cela, on décompose la force répulsive $\frac{\mu}{\rho_0^2}$, qui répond à la position initiale M du mobile, et qui est dirigée suivant le prolongement de FM, en deux autres forces dirigées l'une suivant MV ou son prolongement MV', et l'autre suivant la perpendiculaire KK' à VV' ; cette dernière composante, qui est représentée par $\frac{\mu}{\rho_0^2} \cdot \sin \alpha$, est égale à la force centripète correspondant à la position initiale, de sorte qu'on a

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{\mu}{\rho_0^2} \sin \alpha,$$

d'où

$$R = \frac{\rho_0^2 \rho_2^2}{\mu \sin \alpha},$$

R désignant maintenant le rayon de courbure relatif au point M; on prend, d'après cette équation, $MC = R$ sur la partie de KK' où tombe la composante $\frac{\mu}{\rho_0} \sin \alpha$, on mène CD perpendiculaire à FG , DN perpendiculaire à KK' , ce qui donne, en vertu du théorème précité, le pied N de la normale au point M ; enfin FN est conséquemment la direction de l'axe focal, et la construction de l'hyperbole s'achève par des procédés qu'il est inutile de rappeler.

On tire des équations (1) et (2)

$$\pm dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2}},$$

et, en intégrant cette équation, on a

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \pm t = \frac{1}{a} \sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2} \\ + \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2}}{a} \right) - C, \end{array} \right.$$

C étant une constante.

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ρ augmente continuellement avec t ; on doit donc prendre $+$ devant dt et t , et faire

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{a} \sqrt{a\rho_0^2 - 2\mu\rho_0 - c^2} \\ + \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho_0}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a\rho_0^2 - 2\mu\rho_0 - c^2}}{a} \right), \end{array} \right.$$

afin que $\rho = \rho_0$ donne $t = 0$.

Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, ρ diminue d'abord, puis ensuite augmente avec t , et son minimum, qui répond à $\omega = \beta$, est

$$\frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{\frac{ac^2}{\mu^2} + 1} - 1} = A + \sqrt{A^2 + B^2} = \rho_1;$$

on doit donc prendre premièrement le signe — devant dt et t , ainsi que la valeur précédente de C ; puis, lorsque ρ atteint ρ_1 et dépasse ce minimum, ce qui arrive quand

$$t = C - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \right) = t',$$

prendre + devant dt et t , et faire

$$(\gamma') \quad C = \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \right) - t',$$

afin que $\rho = \rho_1$ donne $t = t'$.

Les équations (3) et (4) fournissent directement l'époque du passage du mobile en un point de l'hyperbole donné seulement par la valeur correspondante de ω . Si l'on voulait sa position à un instant donné, il faudrait résoudre l'équation (4) par rapport à ρ , mettre la valeur obtenue dans l'équation (3), puis la résoudre par rapport à ω .

La vitesse est toujours dirigée tangentiellement à l'hyperbole, et sa grandeur est donnée par l'équation (1) de laquelle on déduit

$$v = \sqrt{a - \frac{2\mu}{\rho}}.$$

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, elle augmente continuellement, tandis que si

$\alpha < \frac{\pi}{2}$, elle diminue d'abord jusqu'à $\sqrt{a - \frac{2\mu}{\rho_1}}$, et augmente ensuite; dans les deux cas elle tend à devenir uniforme et égale à $\sqrt{a}$. On peut remarquer que v ne dépend pas de α , de sorte que la vitesse aura la même grandeur à des distances égales de F, quel que soit cet angle. Il n'en est pas ainsi de t dont l'expression contient c qui dépend de α ; c a bien la même valeur pour des angles (α) supplémentaires l'un de l'autre, mais la constante C doit recevoir la valeur (γ) pour un de ces angles, et la valeur (γ') pour l'autre quand on considère des rayons vecteurs égaux.

Si l'on suppose que le mouvement a commencé avant l'instant à partir duquel on compte le temps, on peut demander de le déterminer à une époque quelconque antérieure à celle-là. Il suffit pour cela de considérer des valeurs négatives de t et de ω ; si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, on prendra + devant dt et t , avec la valeur (γ) de C, jusqu'à $\rho = \rho_1$, qui répond à $\omega = -\beta$, et $t = -t'$, puis antérieurement on prendra — devant dt et t , avec la valeur (γ') de C; et si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, on prendra toujours — avec la valeur (γ'). On peut remarquer que des arcs de même longueur et symétriques par rapport à l'axe focal de l'hyperbole seront décrits par le mobile dans des temps égaux.

Enfin, si l'on avait $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 0$, la trajectoire serait évidemment la droite FM. Dans ces deux cas particuliers, on a

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = a - \frac{2\mu}{\rho},$$

d'où

$$\pm dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho}};$$

(7)

donc la formule (4) s'y applique en faisant $c = 0$, et la discussion en serait semblable à celle qui précède.

QUESTIONS.

I. *Déterminer le mouvement d'un point matériel repoussé par un centre fixe, en raison inverse du cube de la distance.*

II. *Déterminer le mouvement de deux points matériels qui se repoussent ou qui s'attirent, en raison directe de leurs masses et en raison inverse des carrés des distances; ces deux points ayant des vitesses initiales inversement proportionnelles à leurs masses, et dirigées en sens contraires, suivant deux droites parallèles entre elles.*

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851 (*) ;

PAR M. DIEU,
Agrégré, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

COMPOSITION D'ANALYSE.

Le sujet de cette composition a été :

Trouver l'équation différentielle des courbes planes qui, enroulées sur un cylindre droit à base circulaire, donnent des courbes dont le rayon de première courbure est constant.

Montrer que, dans le cas particulier où le rayon de première courbure est égal au rayon de la base du cylindre, l'intégration de l'équation différentielle se ramène à une simple quadrature, et discuter la formule.

Mais, comme rien ne nous oblige à des restrictions qui ont sans doute pour cause la brièveté du temps accordé aux candidats, nous substituerons à l'énoncé précédent celui qui suit :

Déterminer les transformées planes des courbes tracées sur un cylindre de révolution, dont le rayon de courbure est constant.

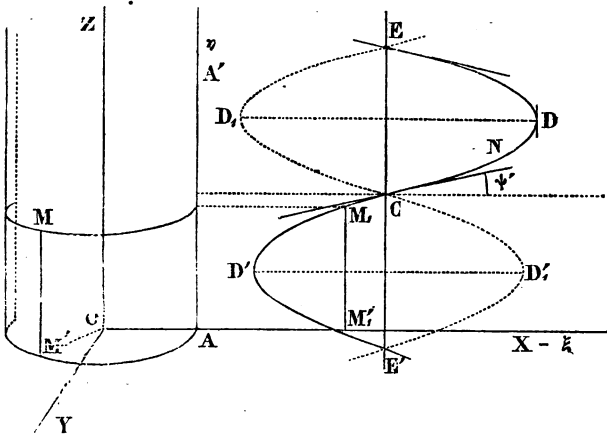
a représentant le rayon constant, les coordonnées rectangulaires des points de ces courbes doivent, d'après une formule connue, satisfaire à l'équation différentielle

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (dy d^2 z - dz d^2 y)^2 + (dz d^2 x - dx d^2 z)^2 \\ + (dx d^2 y - dy d^2 x)^2 = \frac{ds^6}{a^2}, \end{array} \right.$$

(*) Ce problème a été aussi résolu par M. Moncourt (Eugène), élève de l'École Normale.

dans laquelle la variable indépendante est quelconque.

L'axe du cylindre étant pris pour axe des z , supposons qu'on développe sa surface sur le plan $\widehat{zx}$, à partir de la génératrice AA' , et soit M , la position que prend le point $M(x, y, z)$ qui se projetait en M' sur $\widehat{xy}$. Désignons par φ l'angle $M'OX$, par ξ, η les coordonnées de M , relativement à AX et AA' , prises pour axes de coordonnées dans le plan $\widehat{zx}$, enfin par R le rayon du cylindre.



On peut regarder l'arc $R\varphi = \xi$ comme la variable indépendante de l'équation (r), et, à ce point de vue, de

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi,$$

on tire

$$dx = -\sin \varphi \cdot d\xi, \quad dy = \cos \varphi \cdot d\xi,$$

$$d^2x = -\frac{\cos \varphi}{R} \cdot d\xi^2, \quad d^2y = -\frac{\sin \varphi}{R} \cdot d\xi^2.$$

D'ailleurs, il est évident que

$$dz = d\eta, \quad d^2z = d^2\eta \quad \text{et} \quad ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

D'après ces formules, l'équation (1) donne

$$(2) \quad (d\xi^2 + d\eta^2) d\xi^4 + R^2 (d^2\eta)^2 d\xi^2 = \frac{R^2}{a^2} (d\xi^2 + d\eta^2)^3,$$

qui représente les transformées planes, et de laquelle on déduit

$$(3) \quad \left(\frac{d\eta'}{d\xi}\right)^2 = (1 + \eta'^2) \left[\frac{(1 + \eta')^2}{a^2} - \frac{1}{R^2} \right],$$

en posant

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'.$$

Les deux valeurs de $\frac{d\eta'}{d\xi}$, données en général par cette équation, deviennent égales et en même temps nulles, pour celles de η' qui sont déterminées par

$$(4) \quad (1 + \eta'^2)^2 - \frac{a^2}{R^2} = 0;$$

et comme ces dernières valeurs, savoir,

$$\eta' = \pm \sqrt{\pm \frac{a}{R} - 1},$$

sont constantes, de telle sorte qu'on en tire

$$\frac{d\eta'}{d\xi} = 0,$$

l'équation (4) est une intégrale singulière de l'équation (3), pourvu qu'elle ne rentre pas dans l'intégrale générale.

Quoi qu'il en soit, l'intégrale générale de l'équation (4), qui est

$$\eta = \pm \xi \sqrt{\pm \frac{a}{R} - 1} + \text{const.},$$

satisfait à l'équation (3), et elle donne, en prenant + devant $\frac{a}{R}$:

1°. Si $a > R$, deux droites correspondantes aux hélices coupant les génératrices du cylindre sous l'angle dont le cosinus est $\sqrt{\frac{a-R}{a}}$, et dont deux se croisent en chaque point de sa surface ;

2°. Si $a = R$, une parallèle à $A\xi$ correspondante aux sections circulaires auxquelles les hélices se réduisent quand l'angle atteint 90 degrés ;

3°. Si a est infini, une perpendiculaire à $A\xi$ correspondante aux sections rectilignes sur lesquelles on doit tomber quand l'angle est nul.

L'équation (3) étant du premier ordre, on peut immédiatement prendre η' pour variable indépendante. Si l'on pose

$$\eta' = \tan \psi,$$

de sorte que ψ désigne l'angle qu'une parallèle menée de l'origine A , à une partie déterminée de la tangente en chaque point (ξ, η) de la courbe, fait avec $A\xi$, on trouve facilement

$$(5) \quad d\xi = \pm \frac{a \cos \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cdot \cos^4 \psi}},$$

à quoi il faut joindre

$$(6) \quad d\eta = \pm \frac{a \sin \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cdot \cos^4 \psi}},$$

en prenant ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs.

Quelle que soit la valeur du rapport $\frac{a}{R}$, η ne peut s'exprimer sous forme finie, en fonction de ψ , que par une intégrale définie ou par les notations des fonctions ellip-

tiques; si $\frac{a}{R} > 1$, il en est de même de ξ ; et seulement lorsque $a = R$, ξ s'exprime par un logarithme.

1°. Soit $a > R$. ψ' étant le plus petit arc positif dont le cosinus soit $\sqrt{\frac{R}{a}}$, $\frac{d\xi}{d\psi}$ et $\frac{d\eta}{d\psi}$ sont imaginaires pour les valeurs de ψ de 0 à ψ' , réels pour les valeurs de ψ à $\pi - \psi'$, puis redeviennent imaginaires quand ψ dépasse cette dernière valeur à laquelle on peut s'arrêter.

En posant, pour abréger,

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 \psi} = \Psi,$$

on a

$$(7) \quad \xi = c \pm a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos \psi}{\Psi} d\psi,$$

et

$$(8) \quad \eta = c' \pm a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\sin \psi}{\Psi} d\psi,$$

c et c' désignant deux constantes arbitraires, qui sont les valeurs de ξ et η pour $\psi = \psi'$.

Si l'on considère premièrement le signe + devant les intégrales définies; lorsqu'on fait croître ψ de ψ' à $\frac{\pi}{2}$, ξ et η croissent depuis les valeurs c et c' [C] jusqu'à de certaines valeurs d et d' [D]; et lorsque ψ croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi - \psi'$, ξ décroît de d à c , tandis que η continue de croître jusqu'à $c' + 2(d' - c') = 2d' - c'$ [E]. En effet, on a, d'une part,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \psi'} \frac{\cos \psi \cdot d\psi}{\Psi} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi'} \frac{\cos \psi \cdot d\psi}{\Psi} = - \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \psi \cdot d\psi}{\Psi},$$

d'où

$$\int_{\psi'}^{\pi-\psi'} \frac{\cos \psi \cdot d\psi}{\Psi} = 0;$$

et, d'autre part,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\psi'} \frac{\sin \psi \cdot d\psi}{\Psi} = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi'} \frac{\sin \psi \cdot d\psi}{\Psi} = \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \psi \cdot d\psi}{\Psi},$$

d'où

$$\int_{\psi'}^{\pi-\psi'} \frac{\sin \psi \cdot d\psi}{\Psi} = 2 \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \psi \cdot d\psi}{\Psi}.$$

La courbe a donc un arc qui va de C à E, à droite de CE parallèle à Aη. Cet arc tourne sa concavité vers la corde CE, et ses deux parties CD, DE sont égales, car l'inclinaison de la tangente sur la corde CE est égale à $\frac{\pi}{2} - \psi'$ au point C, diminue jusqu'en D, où elle devient nulle, puis reprend de D à E, dans un ordre inverse, les mêmes valeurs que C à D. Si l'on passe du signe + au signe — devant les intégrales définies des équations (7) et (8), pour une même valeur de ψ , $\xi - c$ et $\eta - c'$ changent seulement de signes; la courbe a donc un autre arc CD'E' qui, en tournant de 180 degrés dans le plan autour du point C, irait coïncider avec CDE, et le point C est à la fois un centre et un point d'inflexion.

2°. Soit $a < R$. $\frac{d\xi}{d\psi}$ et $\frac{d\eta}{d\psi}$ ne deviennent imaginaires pour aucune valeur de ψ , et il convient de remplacer, dans les équations (7) et (8), la limite ψ' des intégrales définies par zéro. En prenant successivement les signes + et —, les valeurs de ψ , depuis zéro jusqu'à π , donnent un arc pareil à EDCD'E', mais les tangentes aux points extrêmes sont parallèles à Aξ. Les valeurs depuis π

valeurs dans l'ordre inverse. η , au contraire, varie toujours dans le même sens depuis c' jusqu'à $c' \pm R\sqrt{2} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ [notations de Legendre]. D'après cela, en prenant les signes +, on a la branche GFH; et, en prenant les signes —, la branche G'F'H'. De plus, les droites FK, F'K', représentées par les équations $\eta = c' \pm \frac{R}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sont des axes de symétrie des deux branches concaves, l'une et l'autre, vers ces droites; les droites N, P et P', représentées par $\eta = c'$ et $\eta = c' \pm R\sqrt{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sont des asymptotes; et le point N (c, c'), où FF' coupe la droite N, est un centre.

Si l'on donne à ψ des valeurs comprises entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$ [k étant un nombre entier quelconque], ξ et η sont réels; et ψ , étant un arc compris entre zéro et π , ξ a des valeurs égales pour $\psi = \psi$, et $\psi = 2k\pi + \psi$, tandis que les valeurs correspondantes de η diffèrent de $4k \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. On a donc, pour ces valeurs de ψ , une couple de branches, avec lesquelles celles qu'on a d'abord trouvées iraient coïncider, si on les faisait glisser dans le plan, parallèlement à $\Lambda\eta$, de manière que les coordonnées η s'accrussent toutes de $4k \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Les courbes que nous venons d'obtenir par la discussion sommaire des trois cas que présentent les deux paramètres α et R , ne cessent pas, en raison de ce que le cylindre est de révolution, d'être des transformées de courbes situées sur le cylindre, et ayant le rayon de courbure constant α , lorsqu'on les fait glisser sur le plan $\widehat{zx}$, de manière que tous leurs points décrivent en même temps des droites

parallèles et égales. D'après cela, on peut joindre à l'arc EDD'E', trouvé dans le cas de $a > R$, l'arc ED'D'E', symétrique par rapport à EE'; et aux branches infinies GH, G'H', trouvées dans le cas de $a = R$, les branches symétriques par rapport à la perpendiculaire LL' menée de N à Aξ. On peut aussi *raccorder* les arcs, ou les branches infinies, par les points où les tangentes sont parallèles entre elles, de telle sorte qu'elles viennent se confondre par le *raccord*. Toutes les combinaisons que l'on imaginera donneront toujours des courbes qui satisferont aux équations différentielles (3), (5) et (6), et l'on pourra les déduire des équations (7) et (8), et de celles qui se rapportent au cas de $a = R$, en changeant les constantes arbitraires, les limites des intégrales, ou la manière de prendre les signes doubles.

En résumé, par chaque point M d'un cylindre de révolution de rayon R :

1°. Si $a > R$, il y a deux courbes symétriques par rapport au plan du point M et de l'axe du cylindre, qui jouissent (outre les deux hélices) de la propriété d'avoir le rayon de courbure constant a , pour toute valeur ne dépassant pas $\frac{\pi}{2} - \psi'$ de l'angle sous lequel la courbe devra couper en M la génératrice;

2°. Si $a \leq R$, ces deux courbes existent pour toutes les valeurs de cet angle, depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; et la section droite du cylindre s'y joint, à cette dernière limite, quand $a = R$ (il n'y a pas d'hélice).

Rectification. — Les équations (5) et (6) donnent

$$ds = \frac{ad\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 \psi}};$$

donc, lorsque $a \geq R$, l'arc s ne peut, de même que ξ et η , s'exprimer en fonction de ψ que par une intégrale définie ou par les notations des fonctions elliptiques. Mais, quand $a = R$, on a

$$ds = \frac{R d\psi}{\sin \psi \sqrt{1 + \cos^2 \psi}},$$

et il vient, en intégrant,

$$s = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \log \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \psi} - \sqrt{2} \cdot \cos \psi}{\sin \psi} \right),$$

si l'on prend pour l'origine de l'arc s l'un des points où la tangente est perpendiculaire à $A\xi$.

Aire. — Soit d'abord $a \geq R$. Si l'on désigne par ξ, η , les coordonnées d'un point N de l'arc CDE , par rapport aux parallèles menées de C à $A\xi, A\eta$, et par A le segment compris entre l'arc CN , une partie correspondante de CE et la parallèle menée de N à $A\xi$; on a

$$dA = \xi, d\eta, \quad \xi, = a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos \psi d\psi}{\Psi}, \quad d\eta, = a \cdot \frac{\sin \psi d\psi}{\Psi},$$

en convenant de donner à ψ' , lorsque $a > R$, la valeur précédemment indiquée, et de faire $\psi' = 0$ lorsque $a < R$; donc

$$dA = a^2 \frac{\sin \psi d\psi}{\Psi} \cdot \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos \psi d\psi}{\Psi},$$

et, par suite,

$$A, = 2 a^2 \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin \psi}{\Psi} \cdot \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos \psi d\psi}{\Psi} \right) d\psi,$$

en représentant par A , l'aire du segment CDE .

Lorsque $a = R$, l'ordonnée, et, par conséquent, l'aire, peuvent s'obtenir en fonction de l'abscisse par une simple quadrature. En effet, l'équation entre ξ et ψ , relative à

ce cas, donne

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sin^2 \psi}}{\sin \psi} = e^{\pm \alpha \xi_i},$$

en mettant α au lieu de $\frac{\sqrt{2}}{R}$, afin d'abrégé; par conséquent, on a

$$\sin \psi = \frac{2\sqrt{2}}{e^{\alpha \xi_i} + e^{-\alpha \xi_i}},$$

puis

$$\text{tang } \psi = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(e^{\alpha \xi_i} + e^{-\alpha \xi_i})^2 - 8}},$$

et, comme $\text{tang } \psi = \frac{d\tau_i}{d\xi_i}$, il vient

$$\eta_i = C \pm 2\sqrt{2} \int_{\xi_0}^{\xi_i} \frac{d\xi_i}{\sqrt{(e^{\alpha \xi_i} + e^{-\alpha \xi_i})^2 - 8}} (*),$$

ξ_0 étant une des deux valeurs de ξ , entre lesquelles il faut que cette variable ne tombe pas pour que η , soit réelle

[ces valeurs, déjà trouvées plus haut, sont $\pm \frac{1}{\alpha} \log(\sqrt{2} - 1)$,

on les obtient ici en résolvant l'équation $e^{\alpha \xi_i} + e^{-\alpha \xi_i} = 2\sqrt{2}$].

Enfin, B désignant le segment compris entre un arc FN, les parallèles menées à A ξ par ses extrémités et la droite LL', on a

$$B = 2\sqrt{2} \int_{\xi_0}^{\xi_i} \frac{\xi_i d\xi_i}{\sqrt{(e^{\alpha \xi_i} + e^{-\alpha \xi_i})^2 - 8}}.$$

Rayon de courbure. — ρ désignant le rayon de cour-

(*) C'est par la discussion de cette équation que l'on demandait de reconnaître la forme de la courbe, dans le cas de $a = R$: on trouvera, sans difficulté, la forme représentée par la fig. 2.

(19)

bure, on a, d'après les équations (5) et (6),

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 \psi}} = \frac{a}{\Psi},$$

en appliquant la formule

$$\rho = \frac{ds^2}{dx dy - dy dx}.$$

Si $a > R$, ρ est infini pour $\psi = \psi' [C]$; si $a < R$,
 $\rho = \frac{aR}{\sqrt{R^2 - a^2}}$ pour $\psi = 0 [C]$; et, dans ces deux cas,
 $\rho = a$ pour $\psi = \frac{\pi}{2} [D]$.

Lorsque $a = R$, on a

$$\rho = \pm \frac{R}{\sin \psi \cdot \sqrt{2 - \sin^2 \psi}};$$

ρ est infini pour $\psi = 0$, et $\rho = R$ pour $\psi = \frac{\pi}{2} [F]$. Enfin, on a, dans ce cas,

$$\rho = \frac{R}{2} \frac{(e^{\alpha \xi_1} + e^{-\alpha \xi_1})^2}{e^{\alpha \xi_1} - e^{-\alpha \xi_1}},$$

en remplaçant $\sin \psi$ par sa valeur $\frac{2\sqrt{2}}{e^{\alpha \xi_1} + e^{-\alpha \xi_1}}$.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1849

(voir t. X, p. 201);

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

 (Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

PREMIÈRE QUESTION. — *Étant données une surface, et par chaque point de cette surface une droite qui fait avec les axes rectangulaires des coordonnées, des angles dont les cosinus sont des fonctions continues des coordonnées de ce point, trouver la condition pour qu'il existe une surface normale à toutes ces droites.*

Si l'on prend sur chacune des droites, que nous désignerons par D , à partir du point M où elle perce la surface donnée S , et du même côté, une longueur $Mm = r$ qui soit une fonction continue quelconque des coordonnées x, y, z de M , le lieu géométrique des points m sera une surface S' . En effet, X, Y, Z désignant les cosinus donnés en fonction de x, y, z , et ξ, η, ζ les coordonnées de m , on a

$$(1) \quad \xi - x = rX, \quad \eta - y = rY, \quad \zeta - z = rZ;$$

et, par l'élimination de x, y, z entre ces trois équations et celle de la surface S , on trouvera, généralement, une équation en ξ, η, ζ , qui représentera une surface.

Pour que cette surface S' soit normale aux droites D , il faut et il suffit que les valeurs de ξ, η, ζ , en x, y, z , déterminées par les équations (1) et par celle de la surface S , satisfassent à l'équation

$$(2) \quad (\xi - x) d\xi + (\eta - y) d\eta + (\zeta - z) d\zeta = 0.$$

Or les équations (1) donnent

$$r^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 - (\zeta - z)^2 = 0,$$

de laquelle on tire, en différenciant,

$$\begin{aligned} r dr - (\xi - x)(d\xi - dx) - (\eta - y)(d\eta - dy) \\ - (\zeta - z)(d\zeta - dz) = 0; \end{aligned}$$

cette relation se réduit, d'après l'équation (2), à

$$r dr + (\xi - x) dx + (\eta - y) dy + (\zeta - z) dz = 0;$$

et l'on a, enfin,

$$(3) \quad dr + X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

par la substitution de $rX, \dots$, à $\xi - x, \dots$, suppression faite du facteur commun r .

Donc, pour que la surface S' soit normale aux droites D , il faut que r satisfasse à l'équation (3), eu égard à celle de la surface S ; et l'on voit, sans difficulté, que cette condition est suffisante, en remontant de l'équation (3) à l'équation (2).

Cela étant posé, si nous considérons maintenant r comme une inconnue, la condition demandée consiste évidemment en ce qu'on puisse trouver une valeur de r qui satisfasse à l'équation (3), en tenant compte de celle de la surface S ; et, par conséquent, c'est une condition d'intégrabilité.

Il peut se présenter deux circonstances différentes, que nous allons examiner successivement.

Lorsque l'équation de la surface est soluble par rapport à une des coordonnées, z par exemple, et que l'on en tire

$$dz = p dx + q dy,$$

p, q étant des fonctions de x, y ; l'équation (3) se ramène à

$$dr + (X_r + p Z_r) dx + (Y_r + q Z_r) dy = 0,$$

X, Y, Z , étant ce que deviennent X, Y, Z par la substitution à z de sa valeur en x, y ; et, pour que cette dernière équation soit intégrable, il faut qu'on ait

$$D_y(X, + pZ,) = D_z(Y, + qZ,).$$

Lorsque l'équation de la surface S n'est soluble par rapport à aucune des coordonnées, on aura une équation d'un degré supérieur au premier, ou même transcendante par rapport à dx, dy, dz , en éliminant z et dz entre l'équation (3), celle de S et sa différentielle première. Si l'équation finale est transcendante, on ne lui reconnaît aucun sens; si elle est algébrique, il faut, pour qu'elle en ait un, qu'elle soit décomposable en équations du premier degré par rapport aux différentielles. Et cependant, quand l'équation finale est transcendante, ou qu'elle est algébrique, d'un degré supérieur au premier et indécomposable, il peut se faire qu'il existe une surface normale aux droites D : ainsi, par exemple, cela sera évidemment si $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, quelle que soit d'ailleurs la surface S .

Ce qu'il faut nécessairement, comme nous l'avons indiqué d'abord, pour qu'il y ait une surface normale aux droites D , c'est que l'équation (3) soit intégrable eu égard à celle de S ; et, par conséquent, que le produit du produit du premier membre de l'équation (3) par une certaine fonction de r, x, y, z soit, en tenant compte de l'équation de S , une différentielle exacte. Or, cela exige évidemment que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ satisfasse de la même manière à cette condition; mais il faut bien qu'il la remplisse, abstraction faite de l'équation de S , lorsqu'elle ne peut servir à chasser z et dz , ce qui est le cas dont il s'agit maintenant. Supposons donc que le produit du trinôme par u , qui pourrait contenir r , soit une différentielle exacte, et représentons l'intégrale par U ,

de sorte que l'équation (3) revienne à

$$(4) \quad u \, dr + dU = 0.$$

On a alors entre x, y, z, U, u et r , deux équations, savoir : l'intégrale de la précédente et l'équation de la surface S , et u, U sont des fonctions déterminées de x, y, z ; par conséquent, on peut considérer x, y, z, U comme des fonctions de u, r qui resteraient indépendantes l'une de l'autre. En posant, d'après cela,

$$U = \psi(r, u),$$

d'où

$$dU = \frac{d\psi}{dr} dr + \frac{d\psi}{du} du,$$

l'équation (4) devient

$$\left(u + \frac{d\psi}{dr}\right) dr + \frac{d\psi}{du} du = 0,$$

qui ne peut subsister, à cause de l'indépendance de u, r , sans que l'on n'ait séparément

$$u + \frac{d\psi}{dr} = 0, \quad \frac{d\psi}{du} = 0.$$

D'après la seconde de ces équations, U ne doit dépendre que de r , et, d'après la première, r est une fonction de u ; donc U doit être une fonction de u . On verra aisément si cette condition est remplie, après avoir calculé u et U d'après le trinôme $X \, dx + Y \, dy + Z \, dz$; car, si l'on égale ces fonctions à deux lettres α, β , puis qu'on élimine deux des coordonnées x, y, z entre les deux équations ainsi formées et l'équation de la surface S , il sera nécessaire et suffisant, pour cela, que l'équation finale ne contienne pas la troisième coordonnée, mais seulement α et β .

Enfin, cette dernière condition forme, avec celle de l'intégrabilité du trinôme, une condition complexe évidemment suffisante pour qu'il y ait une surface normale

aux droites D; car, si $U = \varphi(u)$, on aura

$$dr = - \frac{\varphi'(u) \cdot du}{u},$$

de sorte que r se trouvera par une simple quadrature.

La discussion précédente s'applique d'ailleurs évidemment au cas particulier que nous avons d'abord examiné; et, par conséquent, la réponse à la question proposée peut être généralement formulée ainsi :

Il faut et il suffit que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ satisfasse à la condition connue d'intégrabilité des différentielles à trois variables, et que le facteur propre à le rendre intégrable soit, en vertu de l'équation de la surface donnée S, une fonction de l'intégrale.

S'il existe une surface normale aux droites D, il y en a une infinité qui sont deux à deux équidistantes, puisque la valeur de r est de la forme

$$r = \text{const.} + F(x, y, z).$$

Enfin, il résulte de cette analyse, qu'un trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ étant donné, s'il y a, pour une certaine surface, un système de droites menées par tous ses points, et faisant avec les axes des coordonnées rectangulaires des angles dont les cosinus soient les rapports de X , Y , Z à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, qui puissent être coupées normalement par une autre surface, ce trinôme satisfera à la condition d'intégrabilité (*).

Exemples auxquels les méthodes indiquées pour trouver r s'appliquent. 1°. Les cosinus sont proportionnels à $y, x, 2z$, et la surface S est l'hyperboloïde à une nappe

(*) Ce théorème diffère de celui de M. Cauchy sur le même sujet.

représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 3z^2 - xy = 0.$$

2°. Les cosinus sont proportionnels à x^2, y^2, z^2 , et la surface S est représentée par l'équation

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}} = a.$$

Les deux méthodes peuvent être employées pour le premier de ces exemples; mais la seconde méthode seulement s'applique au second.

DEUXIÈME QUESTION. — *Un système de rayons lumineux normaux à une même surface, se réfléchissent sur une surface donnée. Démontrer que les rayons réfléchis sont aussi normaux à une même surface (*)*.

Ces derniers rayons sont ceux dont la réflexion est régulière.

Soient :

M un point de la surface réfléchissante, et MN la normale en ce point;

MI et MR un rayon incident en M et le rayon réfléchi correspondant;

(α, β, γ) , $(\alpha', \beta', \gamma')$, et (λ, μ, ν) les angles qui déterminent la direction de MI, MR et MN, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; enfin, ω les angles égaux IMN et RMN.

Si l'on mène à Ox, dans le sens de cet axe, la parallèle MA, que l'on décrive une sphère de M comme centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, et qu'on joigne deux à deux par des arcs de grand cercle les points A, I, R, N, où cette sphère coupe MA, MI, MR, MN, on a un triangle sphérique dont la médiane AN et les côtés

(*) Théorème de Malus, généralisé par M. Bertrand.

sont représentés par $\lambda, \alpha, \alpha', 2\omega$, et ce triangle donne

$$\cos \alpha' = 2 \cos \lambda \cdot \cos \omega - \cos \alpha,$$

par le théorème sur les médianes des triangles sphériques analogue au théorème sur les médianes des triangles rectilignes (*).

On a, de la même manière,

$$\cos \beta' = 2 \cos \mu \cdot \cos \omega - \cos \beta,$$

$$\cos \gamma' = 2 \cos \nu \cdot \cos \omega - \cos \gamma.$$

Soient encore :

x, y, z les coordonnées de M;

Et $x + dx, y + dy, z + dz$ celles d'un point infiniment voisin de M sur la surface réfléchissante.

D'après l'équation connue

$$\cos \lambda \cdot dx + \cos \mu \cdot dy + \cos \nu \cdot dz = 0,$$

et d'après celles qui précèdent, on a l'équation

$$(1) \quad \begin{cases} \cos \alpha' \cdot dx + \cos \beta' \cdot dy + \cos \gamma' \cdot dz \\ = - (\cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz), \end{cases}$$

de laquelle se déduit immédiatement la démonstration du théorème.

En effet, les rayons (MI) étant normaux à une même surface, le trinôme $\cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz$, dans lequel les cosinus peuvent être considérés comme des fonctions de x, y, z , remplit les conditions voulues pour qu'il y ait une surface normale à ces rayons; donc, d'après l'équation (1), le trinôme $\cos \alpha' \cdot dx + \cos \beta' \cdot dy + \cos \gamma' \cdot dz$, dans lequel les cosinus sont de même des fonctions de x, y, z , remplit aussi ces conditions, et il existe, par conséquent, une surface normale aux rayons (MR), quelle que soit la surface réfléchissante.

(*) « La somme des cosinus de deux côtés d'un triangle sphérique est »
 « égale à deux fois le produit du cosinus de la moitié du troisième côté par »
 « celui de l'arc qui joint le milieu de ce côté au sommet opposé. »

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851;

PAR M. DIEU,

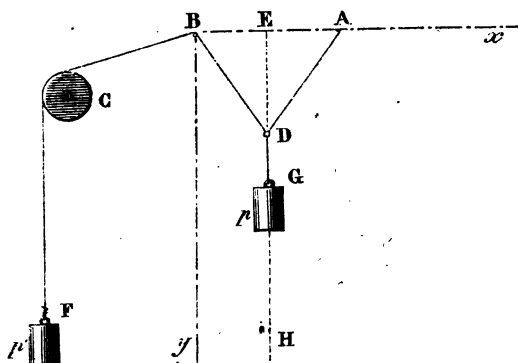
Agrégré, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Un poids p est suspendu à un anneau D; dans cet anneau passe une corde qui, d'une part, est attachée à un point fixe A, et qui, d'autre part, après avoir passé sur une poulie de renvoi B, va s'enrouler sur un cylindre homogène horizontal C, mobile autour de son axe, et soutient enfin un contre-poids p' .

On fait abstraction du poids, de la roideur et de l'épaisseur de la corde, ainsi que des frottements. La poulie de renvoi B est supposée infiniment petite et à la même hauteur que le point fixe A. Trouver le mouvement du système en supposant qu'il n'y ait pas de vitesse initiale.



Nous supposons qu'à l'instant où le mouvement commence, les cordes, considérées comme des lignes parfaitement flexibles et inextensibles, sont comprises dans le

plan vertical P des centres de gravité des deux poids p, p' ; que l'anneau D, considéré comme un point, est au milieu de la partie ADB de la corde AF; enfin, que le mouvement vient de ce qu'on abandonne le poids qui remontera, et que l'on avait retenu jusque-là.

Il suffit, pour répondre à la question, de déterminer le mouvement du point D. Or il est évident, à priori, que ce point ne sortira pas du plan P, et l'on peut démontrer, de plus, qu'il restera sur la verticale EH du milieu de AB. En effet : 1° le mouvement initial de D sera celui d'un point libre, auquel on appliquerait simultanément trois forces, dont la résultante est dirigée suivant EH, l'une égale à la tension de la corde DG, qui est verticale, et les deux autres dirigées suivant DA et DB, égales à la tension de la corde ADBF; 2° si l'on admet que D soit parvenu en D' sur EH, après un certain temps, et que sa vitesse acquise soit dirigée suivant cette droite, on pourra encore considérer ce point comme libre, en lui appliquant trois forces qui seront dans les mêmes conditions que les trois forces dont nous venons de parler, et le mouvement continuera dans la direction EH.

Les axes des coordonnées étant pris comme la figure l'indique, nous désignerons par y l'ordonnée de D, et par y' celle de F, à la fin de la durée t comptée depuis le commencement du mouvement.

AB étant représentée par $2a$, on doit avoir

$$y' + 2\sqrt{a^2 + y^2} = \text{const.};$$

d'où l'on tire

$$\delta y' + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \delta y = 0$$

et

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2a^2}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Les forces perdues sont représentées : pour le poids p , par

$$\frac{p}{g} \left(g - \frac{d^2 y}{dt^2} \right),$$

et pour le poids p' , par

$$\frac{p'}{g} \left(g - \frac{d^2 y'}{dt^2} \right),$$

car les y des centres de gravité de ces poids ne diffèrent respectivement que par des constantes de ceux des points D et F.

On a donc l'équation

$$\frac{p}{p'} \left(g - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(g - \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) \delta y' = 0,$$

d'après une règle connue; et l'on en déduit facilement

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(k + \frac{y^2}{a^2 + y^2} \right) \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{a^2 y}{(a^2 + y^2)^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \\ & - g \left(k - \frac{y}{2\sqrt{a^2 + y^2}} \right) \end{aligned} \right\} = 0,$$

en remplaçant $\delta y'$, ainsi que $\frac{d^2 y'}{dt^2}$ par leurs valeurs tirées des équations précédentes, en posant $\frac{p}{p'} = 4k$.

Comme l'équation (1) ne contient pas t , son ordre s'abaisse en prenant y pour variable indépendante. Si l'on fait pour cela

$$\frac{dt}{dy} = z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = D_y \left(\frac{1}{z} \right) \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{z^3} \cdot \frac{dz}{dy},$$

on a

$$(2) \quad \left(k + \frac{y^2}{a^2 + y^2} \right) \frac{dz}{dy} - \frac{a^2 y}{(a^2 + y^2)^2} z + g \left(k - \frac{y}{2\sqrt{a^2 + y^2}} \right) z^3 = 0.$$

(30)

Cette équation, qui rentre dans le type connu sous le nom d'équation de Bernoulli, devient linéaire en posant

$$\frac{1}{z^2} = u,$$

d'où

$$\frac{1}{z^3} \cdot \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2} \frac{du}{dy};$$

et l'on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dy} + \frac{a^2}{k+1} \cdot \frac{2y}{(\beta^2 + y^2)(a^2 + y^2)} u \\ = \frac{2g}{k+1} \cdot \frac{k\sqrt{a^2 + y^2} - \frac{1}{2}y}{\beta^2 + y^2} \sqrt{a^2 + y^2}, \end{aligned} \right.$$

si l'on fait

$$\frac{a^2 k}{k+1} = \beta^2.$$

Par la comparaison de l'équation (3) avec le type

$$\frac{du}{dy} + Y u = Y_1,$$

dont l'intégrale est

$$u = e^{-\int Y dy} (C + \int Y_1 e^{\int Y dy} dy),$$

on trouve facilement qu'il faut faire

$$e^{-\int Y dy} = \frac{a^2 + y^2}{\beta^2 + y^2},$$

et

$$\int Y_1 e^{\int Y dy} dy = \frac{g}{k+1} (2ky - \sqrt{a^2 + y^2}),$$

afin d'avoir l'intégrale de l'équation (3), qui est

$$u = \frac{g}{k+1} \cdot \frac{a^2 + y^2}{\beta^2 + y^2} (C_1 + 2ky - \sqrt{a^2 + y^2}),$$

si l'on met $\frac{C_1 g}{k+1}$ au lieu de C.

Mais, $\frac{dt}{dy} = \pm \frac{1}{\sqrt{u}}$; donc on a

$$(4) \quad dt = \pm \frac{\sqrt{k+1}}{g} \cdot \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2}{a^2 + \gamma^2}} \cdot \frac{d\gamma}{\sqrt{C_1 + 2k\gamma - \sqrt{a^2 + \gamma^2}}},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où le point D descend, et le signe inférieur à celui où il remonte, puisque dt doit être positive.

On ne peut intégrer l'équation (4) sous forme finie; mais il est possible de reconnaître quel sera le mouvement du point D, par la discussion de cette équation.

Il convient de déterminer, premièrement, la constante arbitraire C_1 ; or, en désignant par γ_0 la valeur initiale de γ , on voit qu'il faut prendre

$$C_1 = \sqrt{a^2 + \gamma_0^2} - 2k\gamma_0,$$

pour que $\frac{d\gamma}{dt}$ soit initialement nulle, et nous supposons, dans ce qui suit, que C_1 a cette valeur.

Les poids p et p' resteraient en équilibre, si l'on avait

$$p = \frac{2p'\gamma_0}{\sqrt{a^2 + \gamma_0^2}} = p_1;$$

par conséquent, on devra examiner successivement les deux hypothèses : $p > p_1$, et $p < p_1$.

1°. Soit $p > p_1$. Le poids p l'emportera, de sorte que l'on doit prendre le signe + dans le second membre de l'équation (4).

Si l'on pose

$$C_1 + 2k\gamma - \sqrt{a^2 + \gamma^2} = z,$$

d'où

$$\frac{dz}{d\gamma} = 2k - \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 + \gamma^2}}.$$

Pour $y = y_0$, $\frac{dz}{dy} > 0$, car $p > p_1$ revient à $2k > \frac{y_0}{\sqrt{a^2 + y_0^2}}$; et y augmentant à partir de y_0 , $\frac{dz}{dy}$ décroît, car $\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$ augmente.

Si $2k > 1$, c'est-à-dire $p > 2p'$, ce qui emporte $p > p_1$, $\frac{dz}{dy}$ ne peut devenir négative, car on a toujours $\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} < 1$; et z croît indéfiniment avec y , car

$$2ky - \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{(4k^2 - 1)y - \frac{a^2}{y}}{2k + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} + 1}}.$$

D'après cela, $\frac{dz}{dy}$ tend vers zéro, car $\beta^2 < a^2$, et, conséquemment, $\sqrt{\frac{\beta^2 + y^2}{a^2 + y^2}}$ est toujours moindre que 1.

Dans ce cas, comme on pouvait le prévoir, le mouvement descendant du point D continuera tant que la longueur de la corde AF le permettra, et la vitesse de ce point croîtra toujours.

Si $2k < 1$, c'est-à-dire lorsque p est compris entre $2p'$ et p_1 , $\frac{dz}{dy}$ devient négative quand y dépasse la valeur

$$\frac{2ak}{\sqrt{1 - 4k^2}} = \frac{ap}{\sqrt{4p'^2 - p^2}},$$

et z , après avoir augmenté depuis zéro jusqu'à la valeur

$$C_1 - a\sqrt{1 - 4k^2},$$

diminue, puis redevient nulle pour la valeur

$$[\alpha] \quad y = \frac{4k\sqrt{a^2 + y_0^2} - (1 + 4k^2)y_0}{1 - 4k^2},$$

qui donne $\frac{dy}{dt} = 0$.

Dans ce cas, le point D ne peut atteindre, en descendant, la position déterminée par cette valeur de y , puisque sa vitesse $\frac{dy}{dt}$ décroît indéfiniment, en même temps qu'il s'en rapproche indéfiniment.

2°. Soit $p < p_1$. Le poids p' l'emportera, et, par conséquent, on doit prendre le signe — dans le second membre de l'équation (4).

Pour $y = y_0$, $\frac{dz}{dy} < 0$, et, y diminuant à partir de y_0 , $\frac{dz}{dy}$ croît et change de signe quand y devient inférieure à $\frac{ap}{\sqrt{4p'^2 - p^2}}$ (cette valeur est moindre que y_0 , dans le cas dont il s'agit maintenant, tandis qu'elle est plus grande que y_0 dans celui dont nous nous sommes occupés en dernier lieu). Comme $dy < 0$, dz est de signe contraire à $\frac{dz}{dy}$; donc z augmente depuis zéro jusqu'à

$$C, - a\sqrt{1 - 4k^2},$$

qui répond à la précédente valeur de y , puis diminue ensuite jusqu'à zéro, qui répond à la valeur $[\alpha]$.

D, en remontant, tend d'après cela vers la position déterminée par la valeur $[\alpha]$ de y ; mais sa vitesse $\frac{dy}{dt}$ tend simultanément vers zéro, et, par conséquent, cette position est une limite que D ne saurait atteindre.

CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1847;

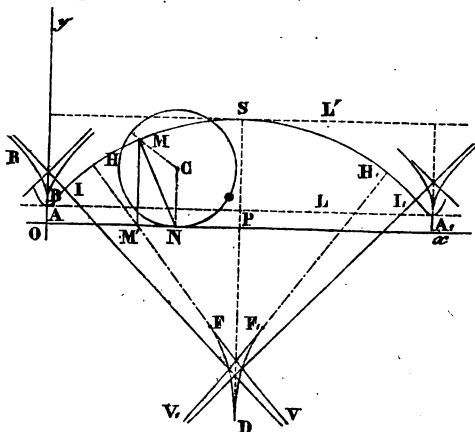
PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

COMPOSITION D'ANALYSE.

Cycloïdes allongées et raccourcies. — Tangentes. — Normales. — Rayons de courbure. — Développées. — Arc. — Segment.

I. *Cycloïdes allongées.* — Soient R le rayon du cercle, G le point intérieur qui engendre la cycloïde, et a la distance de ce point au centre C (*).



L'axe des x sera la droite fixe sur laquelle le cercle roule, et l'axe des y la perpendiculaire menée à cette

(*) Cet article, de même que le suivant, jusqu'aux rayons de courbure, sera facilement compris par les élèves de mathématiques spéciales. La figure se rapporte au cas de $n < 2$.

droite par la position A de G, où il en est à la distance minimum $R - a$.

Il est évident, à priori, que la courbe est indéfinie et comprise entre les droites L et L', dont les équations sont $y = R \mp a$; et que, le cercle roulant dans le sens des x positives, G s'éloigne de L en partant de A, atteint L en S où $x = \pi R$, puis revient sur L en A₁, après avoir décrit SA₁ symétrique de SA par rapport à l'ordonnée SP.

M(x, y) étant un point quelconque de l'arc ASA₁, qu'il suffit d'étudier, et N le point de contact correspondant du cercle avec l'axe des x ; si l'on désigne par φ l'angle MCN (qui peut s'étendre de 0 à 2π), on a les équations

$$(1) \quad x = R\varphi - a \sin \varphi \quad \text{et} \quad y = R - a \cos \varphi.$$

D'après ces équations, $y = R - a$ pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, auxquelles répondent $x = 0$ et $x = 2\pi R$; le maximum de y est $y = R + a$ répondant à $\varphi = \pi$ et $x = \pi R$; enfin, x a des valeurs équi-différentes de πR , et y des valeurs égales entre elles pour des valeurs de φ équi-différentes de π .

Tangentes. — Les équations (1) donnent

$$D_{\varphi} x = R - a \cos \varphi \quad \text{et} \quad D_{\varphi} y = a \sin \varphi.$$

On a donc, en désignant par y' la dérivée $D_x y$, et posant $R = an$,

$$(2) \quad y' = \frac{\sin \varphi}{n - \cos \varphi},$$

d'où

$$D_{\varphi} y' = \frac{n \cos \varphi - 1}{(n - \cos \varphi)^2}.$$

Soit φ_1 le plus petit arc positif dont le cosinus soit $\frac{1}{n}$ ou $\frac{a}{R}$, et soit I le point de AS correspondant à $\varphi = \varphi_1$,

pour lequel $x = R\varphi_1 - a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$ et $y = R - a\frac{a}{R}$. On voit que, φ croissant de 0 à φ_1 , $D_\varphi y'$ est positive et y' croissant de 0 à $\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$; et que, φ continuant de croître jusqu'à π , $D_\varphi y'$ est négative et y' décroissant jusqu'à zéro. Donc, les tangentes en A et S sont parallèles à Ox , l'arc AI est convexe et l'arc IS concave vers Ox , et il y a une inflexion en I.

Normales. — La normale en chaque point M passe par le point de contact correspondant du cercle et de l'axe des x , car l'abscisse, à l'origine de la normale, est

$$x + yy' = R\varphi,$$

d'après les équations (1) et (2).

Cette propriété, qui est commune à toutes les courbes engendrées comme les cycloïdes (*Nouvelles Annales*, tome X, page 212), conduit immédiatement à l'équation différentielle des cycloïdes allongées,

$$dx = \pm \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - (R - y)^2}},$$

dont l'intégrale est

$$x = R \arccos \frac{R - y}{a} \mp \sqrt{a^2 - (R - y)^2}.$$

Rayon de courbure. — Le rayon de courbure en M étant désigné par ρ , en remarquant que $D_x y' = \frac{D_\varphi y'}{D_\varphi x}$, on a

$$(3) \quad \rho = \pm \frac{R}{n} \frac{(1 + n^2 - 2n \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}{n \cos \varphi - 1}$$

(il faut prendre le signe + pour les arcs convexes vers Ox , et le signe — pour les arcs concaves, si l'on veut que ρ soit positif). ρ est évidemment minimum en A où

$\varphi = 0$ et $\rho = \frac{(R-a)^2}{a}$, et il est infini en I où $n \cos \varphi = 1$.

L'équation (3) donne

$$D_{\varphi} \rho = \pm R \sin \varphi (n \cos \varphi + n^2 - 2) \frac{(1 + n^2 - 2 n \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - n \cos \varphi)^2}.$$

Sur AI, $D_{\varphi} \rho$ est positive (il faut prendre le signe +). Si $n > 2$, $D_{\varphi} \rho$ est négative de I en S où elle change de signe à cause du facteur $\sin \varphi$ (il faut prendre le signe —); donc ρ est *minimum* au point S. Si $n < 2$, $D_{\varphi} \rho$, d'abord négative quand φ croît à partir de φ_1 , change de signe lorsque φ passe par la valeur φ_2 , qui est déterminée par l'équation

$$\cos \varphi = \frac{2 - n^2}{n},$$

et reste positive jusqu'à ce que φ atteigne la valeur π , puis devient ensuite négative; donc ρ est *minimum* en un point H de IS, dont les coordonnées sont

$$x = R \varphi_2 - a \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{a}\right)^2} \quad \text{et} \quad y = 2 \left(R - a \frac{a}{R}\right)$$

(double de l'ordonnée du point I), et *maximum* en S.

Développées. — Il résulte de ce qui précède, que la développée de l'arc ASA₁ a des branches infinies dont les asymptotes sont les normales aux points I et I₁ (symétriques de I par rapport à SP), un point de rebroussement sur le prolongement de SP, et, quand $n < 2$, deux autres points de rebroussement qui répondent à H et à H₁ (symétrique de H par rapport à SP).

D'après les équations (1) et (2), celle de la normale en M est

$$(4) \quad \gamma_1 \sin \varphi + x_1 (n - \cos \varphi) - R \varphi (n - \cos \varphi) = 0,$$

x_1 et γ_1 étant les coordonnées courantes. Par l'élimination de φ entre cette équation, et

$$(5) \quad \gamma_1 \cos \varphi + x_1 \sin \varphi - R (n + \varphi \sin \varphi - \cos \varphi) = 0,$$

que l'on forme en égalant à zéro la dérivée du premier membre par rapport à φ , on aurait l'équation de la développée. Mais cette équation est très-compiquée, et il serait préférable de rechercher la forme de la développée au moyen des valeurs de x_1 et y_1 , qu'on tire des deux équations (4) et (5),

$$x_1 = R \left(\varphi - \frac{n - \cos \varphi}{n \cos \varphi - 1} \sin \varphi \right),$$

et

$$y_1 = R \frac{(n - \cos \varphi)^2}{n \cos \varphi - 1}.$$

Ces valeurs donnent, pour les points de rebroussement B et D, $y = R \cdot \frac{R-a}{a}$, et $y = R \cdot \frac{R+a}{a}$, qu'il est facile de construire; et, dans le cas de $n < 2$, pour le point de rebroussement C, $x = R \varphi_1 + 2a \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{a} \right)^2}$, $y = -4 \left(R - a \cdot \frac{a}{R} \right)$, dont la comparaison avec les coordonnées de H montre qu'en ce point le rayon de courbure est triple de la normale.

On voit, du reste, par la discussion même de la cycloïde, que la développée a : 1° une branche infinie BR, concave vers Ox, répondant à AI; 2° une autre branche infinie FV, également concave vers Ox, répondant à IH seulement si $n < 2$, et à IS si $n \geq 2$; 3° lorsque $n < 2$, un arc FD, convexe vers Ox, qui répond à HS, et disparaît quand $n \geq 2$. Enfin, on remarquera que si n variait depuis 2 jusqu'à 1, les points F et F₁, d'abord réunis sur SP avec D, s'écarteraient de SP et tendraient vers A et A₁, sur Ox, en même temps que les asymptotes s'inclineraient sur Ox et tendraient à s'y confondre.

Arc. — On a, en désignant par s l'arc AM,

$$ds = a \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos \varphi} . d\varphi ;$$

d'où, en posant $\varphi = \pi - 2\psi$,

$$ds = -2a(1+n) \sqrt{1 - \frac{4n}{(n+1)^2} \sin^2 \psi} . d\psi .$$

On voit, d'après cette dernière expression de ds , que la rectification de la cycloïde dont il s'agit se ramène à celle d'une ellipse dont les demi-axes sont $2a(n+1)$ et $2a(n-1)$. En intégrant depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à ψ , qui répondent à $\varphi = 0$ et à φ , il vient, par une notation connue,

$$s = 2a(1+n) \left[E \left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n} \right) - E \left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}, \psi \right) \right] ;$$

et conséquemment l'arc AS est exprimé par

$$2a(1+n) . E \left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n} \right) .$$

Segment. — Si l'on désigne par Λ le segment OAMM', on a

$$d\Lambda = a^2 (n - \cos \varphi)^2 d\varphi ;$$

et, en intégrant de manière que $\varphi = 0$ donne $\Lambda = 0$, il vient

$$\Lambda = a^2 \left[\left(n^2 + \frac{1}{2} \right) \varphi - 2n \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] ,$$

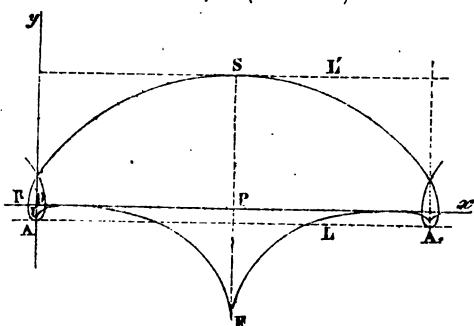
d'où il suit que l'aire OASA₁O₁ a pour mesure

$$2\pi a^2 \left(n^2 + \frac{1}{2} \right) = 2\pi R^2 + \pi a^2 .$$

II. — *Cycloïdes raccourcies.* — Le point G est hors du cercle C, de sorte que $n < 1$. Toutes celles des équations précédentes qui ne supposent pas $n > 1$, s'appliquent ; et nous en déduirons brièvement les principaux caractères de ces courbes, qui sont encore comprises entre les paral-

lèles à Ox dont les équations sont

$$y = R \mp a(L \text{ et } L').$$



Soient φ' et φ'' les valeurs de φ , comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, qui rendent nulles y et x , c'est-à-dire qui satisfont aux équations $n - \cos \varphi = 0$ et $n\varphi - \sin \varphi = 0$, et dont la première φ' est moindre que la seconde φ'' , puisque $n - \cos \varphi$ est la dérivée de $n\varphi - \sin \varphi$ (théorème de Rolle).

Lorsque φ croît de 0 à φ' , x décroît de 0 à $-a(\sin \varphi' - n\varphi')$, car $D_\varphi x < 0$; y croît de $-(a - R)$ à 0, car $D_\varphi y > 0$; et y' décroît de 0 à $-\infty$, car $D_\varphi y' < 0$. On a donc l'arc AB touché en A par la droite L, en B par une parallèle à Oy, et concave vers les deux axes.

De $\varphi = \varphi'$ à $\varphi = \pi$, x est d'abord négative jusqu'à $\varphi = \varphi''$, ensuite positive, et toujours croissante, car $D_\varphi x > 0$; y croît de 0 à $R + a$, car $D_\varphi y > 0$; et y' décroît de l' ∞ à 0, car $D_\varphi y' < 0$. On a donc l'arc BS qui coupe Oy en D, dont l'ordonnée est $R - a \cos \varphi''$, touche L' en S, et est concave vers Ox. φ continuant de croître jusqu'à 2π , on a SB_1A_1 symétrique de SBA, et la courbe comprend une infinité de parties telles que ASA_1 .

Le rayon de courbure est encore évidemment minimum en A, où sa valeur est $\frac{(a - R)^2}{a}$; et il est maximum en S, où sa valeur est $\frac{(a + R)^2}{a}$, car $D_\varphi \rho$ passe du positif au négatif.

gatif quand φ franchit la valeur π (c'est le signe — qu'il faut prendre devant l'expression de ρ).

La développée a deux points de rebroussement I et F correspondant à A et S; elle touche l'axe des x en un point correspondant à B, et dont l'abscisse est $x_1 = R\varphi'$, ainsi qu'en un point symétrique de celui-là par rapport à SP; et elle est partout convexe vers O $\hat{x}$.

Enfin, on remarquera que l'expression de A fournit, par exemple, l'aire de OAB + OBC + OCMM', le point M répondant à la valeur que l'on donne à φ .

Note. M. Ch. Forestier, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Brest, a envoyé aussi une très-bonne et instructive solution de cette question. L'insertion ferait double emploi ou interromprait la suite des travaux que nous devons à l'obligeance de M. Dieu, professeur à Dijon, qui vient d'être nommé professeur à la Faculté de Grenoble.

TM.

CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1847;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer le mouvement d'une sphère pesante, homogène, sur un plan horizontal, en ayant égard au frottement, et en supposant que ce mouvement résulte de certaines vitesses initiales de translation et de rotation imprimées à la sphère d'une manière quelconque.

Nous prendrons le rayon de la sphère pour unité de longueur. Sa masse sera désignée par m ; et le plan horizontal sur lequel elle roule sera celui des $\hat{x}\hat{y}$.

Soient, à la fin de la durée t comptée depuis le commencement du mouvement :

x, y les deux coordonnées du centre M de la sphère qui sont variables (le z est constamment égal à 1);

C le point de la sphère qui est sur le plan $\hat{x}\hat{y}$;

u, v les composantes parallèles aux axes des x et des y de la vitesse de M, dont la direction est parallèle à $\hat{x}\hat{y}$;

MA l'axe instantané de rotation, et α, β, γ les angles qui déterminent sa direction;

ω la vitesse angulaire autour de MA, et p, q, r ses composantes autour des parallèles menées de M aux trois axes.

La vitesse absolue de C est la résultante de la vitesse relative de ce point autour de MA, dirigée suivant la partie CD de la trace du plan CB, perpendiculaire à MA, sur $\hat{x}\hat{y}$, et de la vitesse du centre transportée au point C. Si cette vitesse absolue n'est pas nulle, à l'instant que l'on considère, la sphère glisse en roulant sur $\hat{x}\hat{y}$, et le frottement fait varier le mouvement; tandis que si cette vitesse est nulle, la sphère roule sans glisser, il n'y a pas de frottement, et le mouvement ne varie pas. Nous supposerons d'abord qu'il y a un frottement, dont nous désignerons par mX, mY les deux composantes parallèles aux axes des x et des y .

Les équations du mouvement du centre M sont

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = X, \quad \frac{dv}{dt} = Y,$$

car le poids de la sphère et la résistance du plan $\hat{x}\hat{y}$ se détruisent; et celles du mouvement de rotation autour de MA sont

$$(2) \quad \frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{2}{5} \frac{dq}{dt} = -X, \quad \frac{2}{5} \frac{dp}{dt} = Y,$$

car les produits de $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, par le moment d'inertie $\frac{2}{5}m$ de la sphère autour d'un diamètre, sont les moments des couples dus aux composantes de la rotation autour des parallèles menées de M aux axes des coordonnées, et les moments correspondants de la force de frottement appliquée au point C sont 0, $-mX$ et mY .

Les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad -\frac{dq}{dt} = \frac{5}{2} \frac{du}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{5}{2} \frac{dv}{dt};$$

et, en intégrant depuis $t = 0$, on a

$$(3) \quad \begin{cases} r - r_0 = 0, & -(q - q_0) = \frac{5}{2}(u - u_0), \\ p - p_0 = \frac{5}{2}(v - v_0), \end{cases}$$

u_0 , v_0 , etc., étant les valeurs initiales de u , v , etc....

Il résulte de ces trois dernières équations que : *Si le mouvement de M était rectiligne et uniforme, la sphère tournerait avec une vitesse constante autour d'un de ses diamètres, pendant que ce diamètre se mouvrait parallèlement à une certaine direction.* En effet, on aurait par hypothèse $u = u_0$, $v = v_0$; par suite, en vertu des équations (3), $q = q_0$, $p = p_0$, et l'on a toujours $r = r_0$.

On voit facilement que les composantes, parallèles aux axes des x et des y , de la vitesse relative de C autour de MA, sont $-q$ et p ; celles de la vitesse absolue de ce point suivant les mêmes axes, sont donc, d'après ce qui a été dit plus haut, $u - q$ et $v + p$. Or la direction du frottement est opposée à celle de cette vitesse; donc on a

$$\frac{X}{Y} = \frac{u - q}{v + p},$$

ou bien, en remplaçant q et p par leurs valeurs tirées des

(44)

équations (3),

$$\frac{X}{Y} = \frac{u - a}{v - b},$$

si l'on représente par a et b (pour simplifier) les constantes données

$$\frac{5u_0 + 2q_0}{7} \text{ et } \frac{5v_0 - 2p_0}{7}.$$

D'ailleurs, les équations (1) donnent

$$\frac{X}{Y} = \frac{du}{dv};$$

donc on a

$$\frac{du}{u - a} - \frac{dv}{v - b} = 0,$$

et, en intégrant depuis $t = 0$,

$$(4) \quad \frac{u - a}{v - b} = \frac{u_0 - a}{v_0 - b} = \text{const.};$$

ou bien

$$\frac{X}{Y} = \text{const.}$$

Ainsi, *la direction du frottement est constante*. Quand la vitesse de C ne dépasse pas 4 mètres par seconde, le frottement ne dépend que de la pression (expériences de M. Morin); il est donc constant en grandeur et direction, et, par conséquent,

M décrit, au moins pendant un certain temps, et en général, une parabole tangente à la direction de sa vitesse initiale.

f étant le coefficient du frottement et g la gravité, on a, d'après les équations précédentes,

$$(5) \quad \frac{du}{dt} = -fg \cdot \frac{u - a}{V}, \quad \frac{dv}{dt} = -fg \cdot \frac{v - b}{V},$$

en posant $V = \sqrt{(u - a)^2 + (v - b)^2}$ [$u - a$ et $v - b$ sont respectivement de mêmes signes que $u - q$ et $v + p$,

par conséquent, de signes contraires à X et Y, et V doit être considérée comme positive].

D'après la première de ces équations, du et $u - a$ sont de signes contraires, de sorte que la composante u augmente ou diminue, suivant qu'elle est moindre que a ou plus grande que a ; et, d'après la seconde, on peut en dire autant de v par rapport à b ; u et v tendront donc respectivement vers a et b , et l'on aura en même temps

$$u = a, \quad v = b,$$

puisque $\frac{u-a}{v-b}$ est constant [équation (4)].

Par conséquent,

Le centre M, après avoir décrit, en général, un arc de parabole, continuera de se mouvoir avec une vitesse constante suivant la tangente menée par l'extrémité de cet arc.

V_0 désignant ce que devient V pour $u = u_0$ et $v = v_0$, il résulte de l'équation (4), que

$$\frac{u-a}{V} = \frac{u_0-a}{V_0} \quad \text{et} \quad \frac{v-b}{V} = \frac{v_0-b}{V_0},$$

et les équations (5) reviennent à

$$\frac{du}{dt} = -fg \cdot \frac{u_0-a}{V_0}, \quad \frac{dv}{dt} = -fg \cdot \frac{v_0-b}{V_0}.$$

En intégrant depuis $t = 0$, on a

$$(6) \quad u = u_0 - fg \cdot \frac{u_0-a}{V_0} t, \quad v = v_0 - fg \cdot \frac{v_0-b}{V_0} t,$$

qui donnent pour t la même valeur quand on y fait $u = a$ et $v = b$,

$$t = \frac{V_0}{fg} = \frac{1}{fg} \sqrt{(u_0-a)^2 + (v_0-b)^2}.$$

Si cette équation donnait $t = 0$, le mouvement de M serait immédiatement rectiligne et uniforme; mais, en général, $V_0 > 0$, et ce sera lorsque t atteindra la valeur

$\frac{V_0}{fg}$ que le mouvement de la sphère changera de nature, comme il vient d'être dit.

En remplaçant, dans les équations (6), u et v par $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, et intégrant de manière que $t = 0$ donne

$$x = 0, \quad y = 0,$$

ce qui revient à prendre pour origine le point où la sphère touche d'abord le plan $\hat{xy}$, on a

$$(7) \quad x = u_0 t - \frac{1}{2} fg \frac{u_0 - a}{V_0} t^2, \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} gf \frac{v_0 - b}{V_0} t^2;$$

et, par l'élimination de t , il vient

$$(8) \quad [(u_0 - a)y - (v_0 - b)x]^2 + \frac{V_0}{fg} (av_0 - bu_0) (u_0 y - v_0 x) = 0,$$

qui représente la parabole sur laquelle se trouve, jusqu'à $t = \frac{V_0}{fg}$, le point où la sphère touche $\hat{xy}$. Pendant cette première partie du mouvement, on connaît : 1° les deux coordonnées de M, qui sont seules variables, par les équations (7); 2° les composantes u , v de la vitesse de M, par les équations (6); 3° les composantes p et q de la vitesse angulaire autour de l'axe instantané, par les équations (3). La vitesse de M se déduit ensuite facilement de u et v en grandeur et direction, et l'on achève de déterminer le mouvement de la sphère sur elle-même par les formules

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r_0^2}, \quad \cos \alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{r_0}{\omega}.$$

Mouvement rectiligne de M. Les coordonnées du point où la sphère touche $\hat{xy}$, quand la nature du mouvement change, se déduisent des équations (7) en y faisant

$t = \frac{V_0}{fg}$, et sont

$$x = \frac{(u_0 + a) V_0}{2fg}, \quad y = \frac{(\nu_0 + b) V_0}{2fg}.$$

Pour $t > \frac{V_0}{2g}$, on a

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a};$$

et en prenant l'intégrale de cette dernière équation, de manière qu'elle soit satisfaite par les précédentes valeurs de x et de y , il vient

$$y = \frac{b}{a} x + \frac{(a\nu_0 - bu_0) V_0}{2afg},$$

qui représente la droite sur laquelle se trouve le point dont il s'agit [on vérifie facilement qu'elle touche la parabole de l'équation (8)].

La vitesse de M, devenue constante, est représentée par $\sqrt{a^2 + b^2}$. On a, avec $r = r_0$, qui se rapporte aux deux parties du mouvement,

$$p = \frac{2p_0 - 5\nu_0}{7}, \quad q = \frac{2q_0 + 5u_0}{7},$$

d'après les deux dernières équations (3); et l'on conclut facilement de ces valeurs constantes, celles de ω et de $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, par lesquelles le mouvement de la sphère sur elle-même est déterminé dans la seconde partie.

Enfin, lorsque $u_0 = a$, $\nu_0 = b$, les trois dernières équations, qui s'appliquent depuis le commencement du mouvement, deviennent

$$y = \frac{\nu_0}{u_0} x, \quad p = -\nu_0, \quad q = u_0.$$

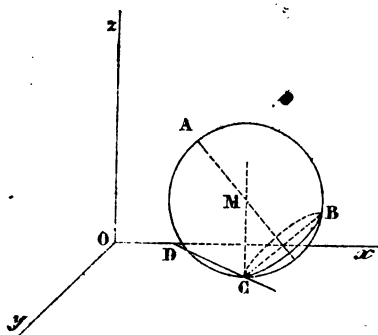
Remarques. 1°. L'axe instantané de rotation restera

toujours parallèle à $\hat{x}y$, s'il est d'abord parallèle à ce plan, car l'hypothèse $r_0 = 0$ entraîne que $r = 0$ [équation (3)];

2°. Le mouvement de M sera tout d'abord rectiligne, non-seulement si l'on a $u_0 = a$, $v_0 = b$, mais encore si l'on a $\frac{a}{u_0} = \frac{b}{v_0} = n$, n étant un nombre quelconque, ce qui renferme le cas précédent pour lequel $n = 1$. En effet, les coefficients de t^2 , dans les équations (7), deviennent ainsi proportionnels à ceux de t , et l'élimination de t conduit à $u_0 y - v_0 x = 0$, que l'on peut aussi déduire de l'équation (8).

Ce mouvement reste uniformément accéléré jusqu'à ce que $t = \frac{1-n}{fg} \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$; puis, passé l'instant marqué par cette valeur de t , il devient uniforme et sa vitesse est $n \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$.

Le cas de $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, c'est-à-dire dans lequel l'axe instantané de rotation est d'abord vertical, se trouve compris dans le précédent, et il répond à $n = \frac{5}{7}$ (*).



(*) On peut voir, pour ce problème, le Mémoire de J.-A. Euler, intitulé : *Recherches des mouvements d'un globe sur un plan horizontal* (Histoire de l'Académie de Berlin, année 1758, pages 284 à 353), et la *Théorie des effets du jeu de billard*, par G. Coriolis (chap. I^{er}, pages 51 à 77).

CONCOURS D'AGREGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1844

PAR M. DIEU,
Agrége, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

COMPOSITION D'ANALYSE.

Intégrer les équations

$$2 \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - 9y + 2x = 0$$

et

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + y - 6x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

On élimine d'abord y , $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ entre ces deux équations et celles qu'on obtient en les différenciant une fois, ce qui conduit à l'équation linéaire du troisième ordre,

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 10 \frac{d^2x}{dt^2} + 29 \frac{dx}{dt} - 26x = -\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{9}{2} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$(1) \quad x = T e^{2t} + T_1 e^{\alpha t} + T_2 e^{\beta t},$$

α et β représentant, pour abréger, $4 + \sqrt{3}$ et $4 - \sqrt{3}$, qui sont avec 2 les racines de l'équation

$$X^3 - 10X^2 + 29X - 26 = 0,$$

et T , T_1 , T_2 étant des fonctions de t déterminées par les équations

$$T = - \int e^{-2t} \cdot \varphi(t) dt, \quad T_1 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \int e^{-\alpha t} \cdot \varphi(t) dt,$$

$$T_2 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \int e^{-\beta t} \cdot \varphi(t) dt,$$

dans lesquelles $\varphi(t)$ tient lieu de $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{9}{2} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$

D.

L'équation (1) est une des intégrales demandées; pour avoir l'autre, on chasse de la première des équations données x et $\frac{dx}{dt}$, ce qui donne

$$2 \frac{dy}{dt} - 9y = (\alpha - 2)T_1 e^{\alpha t} + (\beta - 2)T_2 e^{\beta t},$$

dont l'intégrale est

$$2y = e^{\frac{9t}{2}} \left[(\alpha - 2) \int T_1 e^{\left(\alpha - \frac{9}{2}\right)t} dt + (\beta - 2) \int T_2 e^{\left(\beta - \frac{9}{2}\right)t} dt \right].$$

Quatre constantes sont ainsi introduites, mais elles doivent satisfaire à une équation de condition, et par conséquent il n'y en a que trois qui soient arbitraires.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer les lois des petites oscillations d'un fil flexible, inextensible, et sans masse, suspendu à un point fixe, et chargé de deux points matériels pesants, en supposant que ces deux points n'aient pas de vitesse à l'origine du mouvement, et qu'ils se trouvent alors avec le point de suspension sur une droite très-peu écartée de la verticale.

Chercher les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

I. Soient

m, m' les masses des deux points matériels;

l, l' les longueurs des deux parties du fil;

θ_0 l'angle initial d'écart;

M, M' les positions des deux points à la fin du temps t compté depuis l'origine du mouvement;

θ, θ' les angles que les deux parties du fil font alors avec la verticale (ces angles sont positifs du côté de θ_0 , et négatifs du côté opposé).

D'après l'énoncé, les deux parties du fil resteront constamment tendues, soit quand elles seront sur le prolongement l'une de l'autre, soit quand elles formeront un angle, et les points matériels ne sortiront pas du plan de l'angle θ_0 ; donc m se mouvra toujours sur la circonférence de rayon l décrite du point de suspension comme centre, et, quand m sera en M , m' se mouvra pendant une durée infiniment petite sur la circonférence de rayon l' décrite de M comme centre.

On peut considérer m comme libre, pourvu qu'on lui applique à chaque instant deux forces dirigées suivant les deux parties du fil et égales à leurs tensions respectives. Or :

1°. La tension de l' est la somme $m' \left(g \cos \theta' + l' \frac{d\theta'^2}{dt^2} \right)$ de la composante du poids de m' suivant la direction de l' , et de la force centrifuge due au mouvement de m' relatif à m , et la composante de cette tension suivant la tangente à l'arc décrit par m , s'obtient en la multipliant par $\sin(\theta - \theta')$; car l'angle que cette tangente fait avec la direction de l' est toujours représenté par $\frac{\pi}{2} + \theta' - \theta$.

2°. La composante de la tension de l suivant la même tangente est toujours nulle, et celle du poids de m est $mg \sin \theta$.

Donc, si l'on néglige les termes dont le degré surpasse deux en θ , θ' , $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\theta'}{dt}$, qui sont continuellement des quantités très-petites, on a l'équation approchée.

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l} \left[\frac{m'}{m} \theta' - \left(1 + \frac{m'}{m} \right) \theta \right].$$

Pour en former une seconde, il suffit de remarquer que le mouvement de m' , relatif à m , est, à chaque instant, celui d'un pendule simple de longueur l' , à point de sus-

pension fixe, dont le point matériel pesant et de masse m' serait sollicité par une force accélératrice variable, toujours égale et contraire à celle de m . La composante de cette force, suivant la tangente à l'arc décrit par m' , est $m'l \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \cos(\theta - \theta')$, car cette tangente fait, avec la tangente correspondante à l'arc décrit par m , un angle représenté par $\pm(\theta - \theta')$; celle du poids de m' suivant la même direction est $m'g \sin \theta'$, et celle de la tension de l' est nulle. Donc, on a

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{1}{l'} \left(g\theta' + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \right),$$

au degré d'approximation qui a été indiqué, et, en remplaçant $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ par la valeur que donne l'équation (1), il vient

$$(2) \quad \frac{d^2\theta'}{dt^2} = \frac{g}{l'} \left(1 + \frac{m'}{m} \right) (\theta - \theta').$$

Afin d'intégrer simultanément les équations (1) et (2), on multiplie par un coefficient λ les deux membres de l'une d'elles, par exemple de la seconde, on ajoute ensuite membre à membre, puis, en posant

$$\theta + \lambda \theta' = u,$$

on chasse θ , ce qui donne

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= g \left(1 + \frac{m'}{m} \right) \\ \left\{ \left(\frac{\lambda}{l'} - \frac{1}{l} \right) u - \frac{1}{l'} \left[\lambda^2 + \left(1 - \frac{l'}{l} \right) \lambda - \frac{m' l'}{l(m+m')} \right] \theta' \right\} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de θ' dans cette équation est annulé par deux valeurs réelles de l'indéterminée λ , l'une positive et moindre que $\frac{l'}{l}$, l'autre négative, qui toutes deux ren-

dent négatif le coefficient de u ; en désignant par $-\lambda_1$ et λ_2 ces valeurs de λ , par $-k_1^2$ et $-k_2^2$ celles du coefficient de u [y compris le facteur positif $g \left(1 + \frac{m}{m'}\right)$], et par u_1 et u_2 celles de la fonction u respectivement correspondantes, on a, au lieu des équations (1) et (2), les équations, de même forme l'une que l'autre,

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + k_1^2 u_1 = 0, \quad \frac{d^2 u_2}{dt^2} + k_2^2 u_2 = 0,$$

dont les intégrales, prises de manière qu'on ait $\theta = \theta' = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$ et $\frac{d\theta'}{dt} = 0$, pour $t = 0$, donnent les intégrales particulières des équations (1) et (2),

(4) $\theta - \lambda_1 \theta' = \theta_0 (1 - \lambda_1) \cos k_1 t$, $\theta + \lambda_2 \theta' = \theta_0 (1 + \lambda_2) \cos k_2 t$, qui satisfont aux conditions initiales.

Ces deux intégrales donnent, à chaque instant, au degré d'approximation indiqué, les valeurs de θ et de θ' qui déterminent la position de m et celle de m' . On en déduit facilement celles de $-l \frac{d\theta}{dt}$, $-l' \frac{d\theta'}{dt}$, et par suite les vitesses absolues de m et de m' , dont les composantes horizontales et verticales sont, pour m , $-l \frac{d\theta}{dt}$, $-l\theta \frac{d\theta}{dt}$, et pour m' , $-l \frac{d\theta}{dt} - l' \frac{d\theta'}{dt}$, $-l\theta \frac{d\theta}{dt} - l\theta' \frac{d\theta'}{dt}$. Enfin, le point de suspension étant pris pour pôle, et la verticale de ce point pour axe polaire, on obtiendrait l'équation polaire de la trajectoire de m' par l'élimination de t , θ et θ' , entre les équations (4), et

$$l(2 - \theta^2) + l'(2 - \theta'^2) - \rho(2 - \varphi^2) = 0,$$

$$l(\theta' - \theta) - \rho(\theta' - \varphi) = 0,$$

que l'on trouve facilement (φ et ρ sont les coordonnées de M').

II. Chacun des points m et m' oscillera comme un pendule simple, si les équations (4) donnent les mêmes valeurs de θ et de θ' , pour des valeurs de t en progression par différence de raison quelconque α , et commençant à une valeur quelconque de t . Or, cela exige évidemment que l'on ait

$$(5) \quad \cos k_1 t = \cos k_1 (t + \alpha), \quad \text{et} \quad \cos k_2 t = \cos k_2 (t + \alpha)$$

pour toute valeur de t , et, par conséquent,

$$k_1 \alpha = 2 n_1 \pi, \quad \text{et} \quad k_2 \alpha = 2 n_2 \pi,$$

n_1 et n_2 étant deux nombres entiers positifs, qu'on peut supposer premiers entre eux. Quand il en est ainsi, le rapport $\frac{k_1}{k_2}$ est commensurable; et, réciproquement, si

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

n_1 et n_2 étant deux nombres entiers, les équations (5) sont vérifiées par les valeurs

$$t = t', \quad t' + \alpha, \quad t' + 2\alpha, \text{ etc., ... },$$

quel que soit le temps t' , en prenant $\alpha = \frac{2 n_1 \pi}{k_1} = \frac{2 n_2 \pi}{k_2}$.

Donc, il n'y a qu'une condition nécessaire et suffisante pour que chacun des points matériels oscille comme un pendule simple, savoir : *que le rapport des quantités k_1 et k_2 soit commensurable.*

On peut démontrer que si l'un des deux points oscille comme un pendule simple, il en sera de même de l'autre point.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1850;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Première question. *Un point matériel pesant glisse sans frottement sur une courbe liée à un axe vertical autour duquel elle tourne uniformément; on demande à quelle condition cette courbe doit être assujettie pour que le point glisse d'un mouvement uniforme.*

Seconde question. *Une droite sur laquelle un point matériel pesant glisse sans frottement, tourne uniformément autour d'un axe horizontal auquel elle est liée; déterminer le mouvement du point sur la droite.*

1°. Le mouvement du point sur la courbe tournant autour de l'axe est identique à celui qu'il aurait sur cette courbe rendue fixe, si on lui appliquait continuellement une force égale à la force centrifuge provenant de la rotation autour de l'axe; donc il s'agit de trouver la courbe pour laquelle la somme des composantes tangentielles de la force centrifuge et de la pesanteur est toujours nulle.

L'axe des z coïncidant avec l'axe vertical fixe et étant dirigé de bas en haut, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point à la fin du temps t , par ds l'élément correspondant de la courbe, et par ω la vitesse angulaire constante autour de l'axe des z , la composante tangentielle de la pesanteur est $-g \frac{dz}{ds}$, et celle de la force

centrifuge est $\omega^2 \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} \right)$, car les composantes de cette force suivant les directions des axes sont $x\omega^2$, $y\omega^2$ et 0. Ainsi la courbe doit satisfaire à l'équation différentielle

$$g dz = \omega^2 (x dx + y dy),$$

dont l'intégrale est

$$z - C = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2),$$

qui représente un paraboloïde de révolution autour de l'axe fixe. Donc, la condition demandée est que :

La courbe engendre, en tournant autour de l'axe fixe, un paraboloïde dont la distance du foyer au sommet soit égale à $\frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2}$.

2°. La droite fixe étant prise pour axe des x , et le plan du cercle de gorge de l'hyperboloïde engendré par la droite mobile A, pour celui des $\widehat{yz}$; l'axe des z sera vertical et dirigé de bas en haut, celui des y horizontal et dirigé de manière que la rotation de A autour de l'axe des x s'effectue de celui des y vers celui des z . Cela posé, soient :

ω la vitesse angulaire constante avec laquelle A tourne autour de l'axe des x ;

r le rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde, égal à la plus courte distance de ces deux droites;

a l' x d'un point B de A;

R la distance de B à l'axe des x ;

δ l'angle que la projection de R sur $\widehat{yz}$ fait avec l'axe des y quand $t = 0$;

α l'angle constant que A fait avec l'axe des x , et, à la fin du temps t , β, γ les angles variables

que A fait avec les deux autres axes de coordonnées;

x, y, z les coordonnées du mobile, à la fin du temps t ;

s la longueur (prise avec le même signe que x)

de la partie de A comprise entre le plan $\widehat{yz}$ et le point (x, y, z) .

A la fin du temps t , qui sera compté à partir de l'instant où la droite A coupe Oy , les coordonnées du point où elle perce $\widehat{yz}$ sont

$$0, \quad r \cos \omega t, \quad r \sin \omega t;$$

et celles de B sont

$$a, \quad R \cos(\delta + \omega t), \quad R \sin(\delta + \omega t);$$

donc

$$\cos \beta = \cos \alpha \cdot \frac{R \cos(\delta + \omega t) - r \cos \omega t}{a},$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \frac{R \sin(\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a},$$

et

$$y = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} x + r \cos \omega t, \quad z = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} x + r \sin \omega t.$$

D'ailleurs, en prenant convenablement le sens des x positives, on a

$$x = s \cos \alpha.$$

Les composantes parallèles aux axes de la force centrifuge sont, pour le point (x, y, z) ,

$$0, \quad \omega^2 y, \quad \omega^2 z;$$

donc la composante de cette force suivant la droite A est exprimée par

$$\omega^2 (y \cos \beta + z \cos \gamma),$$

ce qui revient à

$$\omega^2 \left(s \cdot \sin^2 \alpha + r \cos \alpha \cdot \frac{R \cos \delta - r}{a} \right),$$

d'après les équations précédentes, et eu égard à ce que $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \sin^2 \alpha$.

Enfin, la composante de la pesanteur g suivant la droite A est

$$-g \cos \alpha \cdot \frac{R \sin (\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a}.$$

D'après cela, l'équation du mouvement suivant la droite A est

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot s = & -g \cos \alpha \cdot \frac{R \sin (\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a} \\ & + r \omega^2 \cos \alpha \cdot \frac{R \cos \delta - r}{a}. \end{aligned}$$

On voit facilement que, C, C' désignant deux constantes arbitraires, l'intégrale de cette équation est

$$\begin{aligned} s = & C e^{\omega t \sin \alpha} + C' e^{-\omega t \sin \alpha} \\ & + g \cos \alpha \cdot \frac{R \sin (\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a \omega^2 (1 + \sin^2 \alpha)} - \frac{r \cos \alpha \cdot (R \cos \delta - r)}{a \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

(e est la base des logarithmes népériens); et, par suite, on a, en désignant par ν la vitesse du mobile à la fin du temps t ,

$$\begin{aligned} \nu = & \omega \sin \alpha \cdot (C e^{\omega t \sin \alpha} - C' e^{-\omega t \sin \alpha}) \\ & + g \cos \alpha \cdot \frac{R \cos (\delta + \omega t) - r \cos \omega t}{a \omega (1 + \sin^2 \alpha)}. \end{aligned}$$

Ces deux formules donneront les valeurs de s , ν , à un instant quelconque, quand on aura déterminé C, C', d'après les valeurs initiales; elles feront par conséquent connaître le mouvement du point matériel sur la droite A, dont la position sera déterminée par les coordonnées du

point où elle perce le plan $\widehat{yz}$, et les valeurs correspondantes de $\cos \alpha$, $\cos \beta$, ou, si l'on aime mieux, on calculera x , y , z au moyen des équations qui ont d'abord été posées.

Si $C > 0$, le terme qui contient $e^{\omega t \sin \alpha}$, comme facteur, finira toujours par dominer dans les valeurs de s et de ν qui croîtront indéfiniment avec t .

Si $C = 0$, ce seront au contraire les termes contenant les lignes trigonométriques qui domineront à la longue, de sorte que le mouvement tendra à devenir oscillatoire.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1849;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

COMPOSITION DE MÉCANIQUE (*).

Deux points matériels pesants s'attirent en raison directe des masses, et en raison inverse des carrés des distances; ils ont des vitesses initiales parallèles et dirigées dans un même plan vertical: déterminer le mouvement de ces points dans le vide.

Il est d'abord évident qu'ils ne sortiront pas du plan vertical des vitesses initiales.

Soient :

m , m' les masses des deux points, et $m + m' = m_1$;
 ν_0 , ν'_0 les vitesses initiales de m et m' ;

(*) La composition d'analyse de l'année 1849 se trouve à la page 20.

G le centre de gravité de ces masses à un instant quelconque ;

(ν_0 sera positive, ν'_0 positive ou négative, selon qu'elle sera de même sens que ν_0 ou de sens opposé).

G se mouvra dans le plan des vitesses initiales comme un point matériel pesant et libre, qui partirait de la position initiale de G avec la vitesse

$$\frac{m\nu_0 + m'\nu'_0}{m_1}$$

parallèle à ν_0 (principe du mouvement du centre de gravité). Donc, G décrira une parabole si cette vitesse n'est pas nulle ou verticale, et une droite dans ces deux cas particuliers.

Pour reconnaître quels seront les mouvements de m et m' relativement à G, il faut : 1° imprimer d'abord à ces masses des vitesses égales et contraires à la vitesse initiale de G, de sorte que leurs vitesses initiales deviendront respectivement

$$\frac{m'}{m_1}(\nu_0 - \nu'_0), \quad -\frac{m}{m_1}(\nu_0 - \nu'_0);$$

2° leur appliquer à chaque instant une force accélératrice égale et contraire à la pesanteur qui ferait suivre à un point matériel libre le mouvement du point G (principes des mouvements relatifs). Or la force accélératrice ajoutée ainsi, détruisant l'effet de la pesanteur sur m et m' , les mouvements de ces masses par rapport au point G ne seront dus qu'à leurs vitesses initiales relatives, et à leur action mutuelle. Mais cette action donne pour m et m' des forces qui sont toujours en raison inverse des carrés des distances de ces points au point G ; car on a, d'après une loi connue,

$$r = \frac{m_1}{m'} \rho = \frac{m_1}{m} \rho',$$

r , ρ et ρ' désignant les distances (m, m') , (m, G) et (m', G) , de sorte que les forces appliquées à m et m' sont représentées par

$$\frac{m m' \mu}{m_1^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{m^2 m' \mu}{m_1^2} \cdot \frac{1}{\rho'^2},$$

μ désignant l'action mutuelle rapportée à l'unité de masse et à l'unité de distance. Donc :

Les mouvements relatifs de m et m' autour de G s'effectueront, en général, sur des sections coniques à éléments constants, dont un foyer suivra le mouvement de G ; et ces coniques pourront, dans des cas particuliers, se réduire à des circonférences ou à des droites.

On a toujours

$$\rho' : \rho :: m : m';$$

donc :

Les trajectoires relatives de m et m' autour de G sont des lignes homothétiques, dont le point G est un centre d'homothétie inverse.

Il résulte de cette exposition que des formules connues donneront, à chaque instant, la position et la vitesse absolue de G , ainsi que la position et la vitesse de m et m' relativement à G . On trouvera la position absolue de m et m' par une addition de coordonnées, et la vitesse absolue de l'une ou de l'autre de ces masses, en prenant la résultante de la vitesse relative et de la vitesse absolue de G transportée à cette masse.

Si l'on applique le calcul à la question, on sera d'abord conduit aux conclusions qui précèdent. Nous ne donnerons pas cette application (il s'y présente, pour la détermination des constantes arbitraires, des choses analogues à celles qu'on trouve dans la solution du problème de Mécanique de l'année 1841, *Nouvelles Annales*, tome X, page 330), parce qu'elle n'offre pas beaucoup d'intérêt

et qu'elle est fort longue, attendu qu'il faut considérer successivement un assez grand nombre d'hypothèses, quant aux circonstances initiales qui influent sur la nature des trajectoires et des mouvements de m et m' relatifs à G , et absolus.

Nous dirons seulement que les trajectoires absolues de m et m' , transcendantes dans tous les autres cas, sont algébriques dans celui où les trajectoires relatives sont des paraboles. Enfin, nous ferons remarquer que, si l'on avait

$$m v_0 + m' v'_0 = 0,$$

c'est-à-dire si les quantités initiales de mouvement de m et m' étaient égales et de sens opposés, G ne bougerait pas, de telle sorte que les trajectoires absolues de m et m' ne seraient autres que leurs trajectoires relatives à G .

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1850;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI.)

Si une courbe à double courbure a sa première courbure constante, le lieu géométrique des centres de courbure se confond avec l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe des plans normaux, et réciproquement.

Le rayon de courbure R est donné pour chaque point $M(x, y, z)$ de la courbe par la formule

$$R^2 = \frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2},$$

en prenant x pour variable indépendante, et désignant par y' , y'' , z' , z'' les dérivées première et seconde de y et z ; et, puisque R est constant, on a

$$(1) \quad \begin{cases} 3(y'y'' + z'z'') [(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2] \\ - [(y'z'' - z'y'')(y'z''' - z'y''') + y''y''' + z''z'''] (1 + y'^2 + z'^2) = 0. \end{cases}$$

Le centre de courbure $A(\xi, \eta, \zeta)$ est déterminé pour le point M par l'équation du plan osculateur, celle du plan normal, et la dérivée de cette dernière équation, savoir :

$$(2) \quad (\xi - x)(y'z'' - z'y'') - (\eta - y)z'' + (\zeta - z)y'' = 0,$$

$$(3) \quad \xi - x + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$

$$(4) \quad (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = 1 + y'^2 + z'^2;$$

et le point B de l'arête de rebroussement, correspondant à M , dont on peut aussi représenter les coordonnées par ξ, η, ζ , est déterminé par les équations (3), (4), et par la dérivée de l'équation (4),

$$(5) \quad (\eta - y)y''' + (\zeta - z)z''' = 3(y'y'' + z'z'').$$

Or, si l'on tire des équations (2), (3), (4) les valeurs de $\eta - y$ et de $\zeta - z$, puis qu'on les substitue dans l'équation (5), on trouve que le résultat ne diffère pas de l'équation (1). Donc on déduirait des équations (3), (4), (5) les mêmes valeurs de ξ, η, ζ que des équations (2), (3), (4), et, par conséquent, B coïncide avec A , quel que soit le point M de la courbe donnée, ce qui démontre la proposition directe.

La réciproque n'est pas plus difficile à prouver. En effet, pour que le lieu des centres de courbure se confonde avec l'arête de rebroussement dont il s'agit, il faut et il suffit, d'après ce que nous venons de dire, que la courbe satisfasse à l'équation (1). Mais, en posant

$$1 + y'^2 + z'^2 = u, \quad (y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2 = v,$$

(64)

cette équation devient

$$3vdu - u dv = 0,$$

et, en intégrant, on a

$$\frac{u^3}{v} = \text{const.},$$

ou bien

$$R = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1843 (*) ;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XII.)

COMPOSITION D'ANALYSE.

Trouver l'équation des surfaces, telles que, si, d'un point donné A on abaisse une perpendiculaire sur un plan tangent, le rectangle de cette perpendiculaire et de la portion de la normale comprise entre le point de contact M et un plan P mené par le point A, soit équivalent au carré de AM.

Si l'on prend A pour origine des coordonnées rectangulaires, et le plan P pour celui des xy ; x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque M d'une des surfaces demandées,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \pm \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \text{et} \quad \pm z \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

représentent respectivement AM, la distance de A au plan tangent en M, et la portion de la normale en M, qui est définie dans l'énoncé; mais il faut prendre, devant les deux dernières expressions, le signe pour lequel elles sont positives.

Les surfaces cherchées sont donc celles qui satisfont,

(**) Nous ne donnerons, de cette année, que la composition d'analyse, attendu que celle de mécanique n'était autre chose que l'analyse du pendule conique.

soit à l'équation

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = z(z - px - qy), \\ \text{ou} \\ zx \frac{dz}{dx} + yz \frac{dz}{dy} + x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

soit à l'équation

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = -z(z - px - qy), \\ \text{ou} \\ zx \frac{dz}{dx} + yz \frac{dz}{dy} - x^2 - y^2 - 2z^2 = 0. \end{cases}$$

Par la méthode de M. Jacobi, l'intégrale de l'équation (1) se déduit de celles des équations simultanées

$$\frac{dx}{zx} = \frac{dy}{zy} = -\frac{dz}{x^2 + y^2},$$

qui sont

$$\frac{y}{x} = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2;$$

et cette intégrale est

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

On obtient de même l'équation

$$(4) \quad x^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

dans laquelle ψ désigne encore une fonction arbitraire, pour l'intégrale de l'équation (2).

Les surfaces comprises dans les équations (3) et (4) présentent deux caractères communs :

1°. Elles ont, pour centre, le point A ; car ces équations

tions ne changent pas quand on remplace x, y, z par $-x, -y, -z$.

2°. *Le plan P ou xy est un plan diamétral principal* ; car ces équations donnent deux valeurs de z égales, et de signes contraires pour chaque système de valeurs de x, y .

Si l'on coupe les surfaces comprises dans l'équation (3) par des plans conduits suivant Az , on a toujours un cercle dont le centre est A. En effet, pour avoir l'équation d'une de ces sections par rapport à Az et à la trace Ax' de son plan sur xy , il suffit de faire dans l'équation

$$x = x' \cos \theta, \quad y = x' \sin \theta$$

(θ désignant l'angle $x'Ax$ compté de Ax vers Ay) ; ce qui donne

$$x'^2 + z^2 = \varphi(\tan \theta),$$

équation qui représente une circonférence, si

$$\varphi(\tan \theta) > 0 ;$$

l'origine A seulement, si

$$\varphi(\tan \theta) = 0,$$

et qui ne représente rien, si

$$\varphi(\tan \theta) < 0.$$

Enfin, on voit facilement que l'origine est un point isolé des surfaces comprises dans l'équation (4).

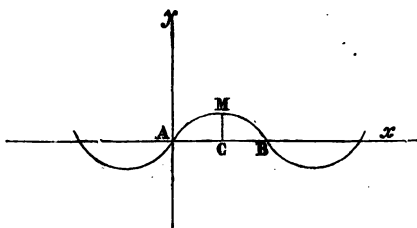
**CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉES 1842
ET 1848 (*) ;**

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XII.)

1848. — COMPOSITION D'ANALYSE.

Parmi toutes les courbes planes de même longueur l , qui se terminent à deux points donnés A, B, déterminer celle qui a le plus grand moment d'inertie par rapport à AB. Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe et la droite AB, ainsi que l'aire de la surface qui serait engendrée par la courbe si elle tournait autour de cette droite en faisant une révolution complète.



AB étant prise pour axe des x , et la perpendiculaire

(*) La même courbe répond au problème de mécanique de 1842 et au problème d'analyse de 1848 ; c'est pour cela que nous les avons réunis.

en A pour axe des y , le moment d'inertie dont il s'agit est représenté par $\int_0^l y^2 ds$, et, d'après les principes du calcul des variations, la courbe demandée doit être déterminée au moyen de l'équation

$$\delta \cdot \int_0^l (y^2 - \lambda) ds = 0,$$

λ étant une constante qui dépend de la longueur donnée l .

En intervertissant l'ordre des opérations indiquées par les signes δ et $\int$, et faisant, pour plus de facilité, varier x et y , on déduit de cette équation

$$\int_0^l \left\{ \delta y \left[2y + D_1 \cdot (\lambda - y^2) \frac{dy}{ds} \right] + \delta x \cdot D_1 \cdot (\lambda - y^2) \frac{dx}{ds} \right\} ds = 0,$$

attendu que δx et δy sont nulles aux limites.

Suivant les principes auxquels nous venons de renvoyer, on a une équation différentielle de la courbe demandée, en posant

$$D_1 \cdot (\lambda - y^2) \frac{dx}{ds} = 0.$$

On peut évaluer à zéro soit le coefficient de δx , soit celui de δy , car les deux équations ainsi formées rentrent l'une dans l'autre; il faut choisir la moins compliquée.

Une première intégration donne

$$c \frac{ds}{dx} = \lambda - y^2,$$

c étant une constante arbitraire; et l'on tire facilement de

cette équation

$$(1) \quad c \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(\lambda - y^2)^2 - c^2}.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer :

1°. Qu'à cause du double signe dont le radical est affecté, et de ce que la quantité sous le radical ne contient que c^2 , il suffit de supposer $c > 0$;

2°. Que λ^2 doit surpasser c^2 pour que de très-petites valeurs de y ne rendent pas $\frac{dy}{dx}$ imaginaire;

3°. Que λ ne peut être négative, parce que, dx étant positive quand x croît de zéro à AB et y^2 étant nécessairement croissant à partir de zéro, si λ était négative, le radical croîtrait toujours et dy ne changerait pas de signe, attendu qu'il n'y aurait aucune raison pour passer d'un signe à l'autre devant le radical; de sorte que y ne pourrait devenir nulle pour $x = AB$, tandis qu'il faut au contraire que cela ait lieu.

Il résulte de ces remarques que la valeur $\sqrt{\lambda - c}$ est un maximum de y qui ne peut la dépasser en croissant à partir de zéro, sans que $\frac{dy}{dx}$ ne devienne imaginaire. On posera, par conséquent,

$$(2) \quad y = \sqrt{\lambda - c} \cdot \sin \varphi.$$

En substituant cette expression à y dans l'équation (1), on obtient

$$dx = \frac{c}{\sqrt{\lambda + c}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda - c}{\lambda + c} \sin^2 \varphi}},$$

si l'on regarde φ comme croissant à partir de zéro, et si l'on convient de passer du $+$ au $-$ devant le radical de

l'équation (1) lorsque y passe par sa valeur maximum qui répond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Puis on a

$$(3) \quad x = \frac{c}{\sqrt{\lambda + c}} \cdot F\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}, \varphi\right),$$

F étant la caractéristique de la fonction elliptique de première espèce.

D'après la valeur précédente de dx , l'équation

$$ds = \frac{\lambda - y^2}{c} dx$$

devient

$$ds = \sqrt{\lambda + c} \cdot d\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda - c}{\lambda + c} \sin^2 \varphi} - dx,$$

et l'on a

$$s = \sqrt{\lambda + c} \cdot E\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}, \varphi\right) - x,$$

* E étant la caractéristique de la fonction elliptique de seconde espèce; ainsi la rectification de la courbe cherchée se ramène à celle de l'ellipse dont les demi-axes sont $\sqrt{\lambda + c}$ et $\sqrt{2c}$.

y devient nulle pour $\varphi = \pi$; donc on doit avoir

$$\frac{2c}{\sqrt{\lambda + c}} \cdot F\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right) = AB,$$

et

$$2\sqrt{\lambda + c} \cdot E\left(\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}}\right) = l - AB,$$

ce qui détermine λ et c (*).

(*) On emploie encore ici les notations de Legendre; les fonctions F et E ont, comme on sait, pour $\varphi = \pi$, des valeurs doubles de celles

Les valeurs de y et de dx donnent

$$y dx = \frac{c \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\lambda-c} - \sin^2 \varphi}},$$

et en intégrant cette expression depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, on trouve, pour l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe et AB,

$$c [\log (\sqrt{\lambda+c} + \sqrt{\lambda-c})^2 - \log 2c].$$

La différentielle de l'aire de la surface engendrée par la courbe tournant autour de AB est $2\pi y ds$; or les valeurs de y et de ds en fonction de φ donnent

$$2\pi y ds = 2\pi (\lambda - c) \frac{\frac{c}{\lambda - c} + \cos^2 \varphi}{\sqrt{\frac{2c}{\lambda - c} + \cos^2 \varphi}} \cdot \sin \varphi d\varphi;$$

et, en intégrant entre les limites qui viennent d'être indiquées, on a

$$2\pi \sqrt{\lambda^2 - c^2},$$

pour l'aire de la surface de révolution dont il s'agit.

Enfin, on a encore

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{2\sqrt{\lambda-c}}{c^2} [\lambda - (\lambda - c) \sin^2 \varphi] \sin \varphi.$$

Rien n'est plus facile que de se faire, d'après les expressions de x , y , $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2 y}{dx^2}$ en fonction de la variable

qu'elles ont pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et ces dernières sont exprimées par

$$F\left(\sqrt{\frac{\lambda-c}{\lambda+c}}\right), E\left(\sqrt{\frac{\lambda-c}{\lambda+c}}\right) \text{ pour le module } \sqrt{\frac{\lambda-c}{\lambda+c}}.$$

auxiliaire φ , une idée exacte, tant de l'arc limité à A et B qui répond à la question, que de toute la courbe qui satisfait à l'équation (1). En effet :

1°. φ croissant de 0 à π , x croît de 0 à AB, y croît d'abord de 0 à $\sqrt{\lambda - c}$ (maximum qui répond à $x = \frac{AB}{2}$), puis décroît jusqu'à 0, $\frac{dy}{dx}$ décroît de $\frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c}$ à $-\frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c}$, en passant par zéro quand $x = \frac{AB}{2}$, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ reste constamment négative;

2°. y a la même valeur et $\frac{dy}{dx}$ des valeurs de signes contraires pour des valeurs de φ équidifférentes de $\frac{\pi}{2}$ auxquelles répondent des valeurs de x équidifférentes de $\frac{AB}{2}$.

3°. Enfin $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_1 + k\pi$, φ_1 étant entre zéro et π , et k un nombre entier positif ou négatif, donnent des valeurs de x qui diffèrent entre elles de $k\pi$, et des valeurs de y , $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui sont égales et de même signe, ou égales et de signes contraires suivant que k est pair ou impair.

Donc :

L'arc AMB est concave vers sa corde AB, et formé de deux parties symétriques par rapport à l'ordonnée CM de son milieu M.

La courbe est composée d'une infinité de parties égales à AMB, situées les unes du côté des y positives, les autres du côté des y négatives, comme une sinusoïde, et les points tels que A, B, etc., sont en même temps des centres et des points d'inflexion.

1842. — COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Démontrer qu'un fil flexible homogène et sans masse peut tourner autour de la droite qui joint ses extrémités fixes, en conservant une figure permanente, et déterminer cette figure; on fait abstraction de la résistance de l'air et des frottements.

Soient A, B les extrémités fixes du fil; s'il tournait effectivement autour de AB, en conservant une figure constante AMB, ses points décriraient des circonférences dont AB serait l'axe commun, et ils auraient tous, au même instant, la même vitesse angulaire, qui ne varierait pas, d'ailleurs, avec le temps, puisqu'il n'y a pas de forces appliquées. Or, chaque sommet du polygone infinitésimal qu'il est permis de substituer à la courbe dans le raisonnement, peut être considéré comme un point libre, si on lui applique à chaque instant une force égale à la résultante des tensions des côtés contigus; et cette force ne diffère pas de la force centripète due au mouvement circulaire uniforme du sommet autour de AB; de sorte que sa direction, qui est comprise dans le plan osculateur, coupe cette droite. Donc le deuxième élément de la courbe, à partir de A, est dans le plan du premier et de AB; le troisième dans le plan du deuxième et de AB; et ainsi de suite. Ainsi, *la figure AMB est plane*, en admettant qu'elle existe.

Si l'on désigne par T la tension du fil au point (x, y) , par s la longueur de la partie qui est entre ce point et l'extrémité A, enfin par ω la vitesse angulaire constante de tous les points autour de AB; et si l'on prend pour axe des x la droite AB, et pour axe des y la perpendiculaire élevée en A à cette droite dans le plan mobile AMB; les composantes, suivant les axes de la force qu'il suffi-

rait d'appliquer à (x, y) pour pouvoir considérer ce point comme libre, sont représentées par $D_s.T \frac{dx}{ds}$, $D_s.T \frac{dy}{ds}$, et celles de la force centripète par 0 , $-\omega^2 y$. Si la courbe AMB existait, on aurait donc, d'après ce qui précède, les deux équations

$$D_s.T \frac{dx}{ds} = 0, \quad D_s.T \frac{dy}{ds} + \omega^2 y = 0;$$

et; réciproquement, le théorème énoncé sera démontré si l'on peut avoir une courbe qui satisfasse à l'équation déduite de celles-ci par l'élimination de T , et qui passe en A, B.

De la première de ces deux équations on déduit immédiatement

$$(1) \quad T = c_1 \frac{ds}{dx},$$

c_1 désignant une constante arbitraire.

En effectuant les dérivations qui ne sont qu'indiquées, multipliant ensuite par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ respectivement, puis ajoutant, on a

$$\frac{dT}{ds} + \omega^2 y \frac{dy}{ds} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(2) \quad T = c_2 - \frac{\omega^2}{2} y^2,$$

en désignant par c_2 une seconde constante arbitraire.

Enfin, par l'élimination de T entre les équations (1) et (2), il vient

$$c \frac{ds}{dx} = \lambda - y^2,$$

si l'on remplace c_1 par $c \frac{\omega^2}{2}$, et c_2 par $\lambda \frac{\omega^2}{2}$.

Or cette équation est identique à la première des équations différentielles qu'on a eues pour la courbe du problème précédent ; donc le théorème dont il s'agit maintenant est démontré, ainsi que cela a été annoncé plus haut, puisque non-seulement on peut faire passer la courbe par les points A , B , mais encore l'astreindre à une autre condition quelconque.

Il convient de remarquer qu'il peut y avoir de A à B deux, ou même un nombre quelconque d'arcs tels que AMB.

**NOTE SUR LES THÉORÈMES QUI SERVENT DE BASE A LA
RECTIFICATION DES COURBES;**

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XII.)

Courbes planes.

On peut appliquer à une courbe plane quelconque la démonstration de ce théorème, qu'on ne donne ordinairement que pour un arc de cercle :

La limite du rapport d'un arc indéfiniment décroissant à sa corde est égale à l'unité.

En effet, soient

- AB un arc de courbe dont l'extrémité A reste fixe
et dont l'extrémité B varie sur cette courbe ;
 s , c et t les longueurs de cet arc, de sa corde et de la
brisée ACB formée par les tangentes en A et B ;
 α le plus grand des deux angles adjacents au côté AB
dans le triangle ACB qui renferme l'arc AB sup-
posé assez petit.

On a évidemment

$$c = AC \cdot \cos A + BC \cdot \cos B,$$

et, par conséquent,

$$c > t \cos \alpha.$$

Mais on peut admettre que $t > s$; ainsi l'inégalité qui précède donne, à *fortiori*,

$$(1) \quad c > s \cos \alpha,$$

D.

d'où

$$\frac{s}{c} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Donc, comme $\frac{s}{c}$ ne peut tomber au-dessous de 1, et comme

$\frac{1}{\cos \alpha}$ tend vers 1 (limite inférieure), lorsque α tend vers 0, on a

$$\lim \frac{s}{c} = 1,$$

quand s tend vers zéro.

C. Q. F. D.

On démontre de même que :

La limite du rapport de la différence entre un arc et sa corde au cube de l'arc est inférieure à la moitié du carré de la courbure.

Premièrement, on déduit à fortiori de l'inégalité (1) que

$$c > s \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right),$$

car $\cos \alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$; et, par conséquent, on a

$$(2) \quad \frac{s-c}{s^3} < \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{s} \right)^2.$$

D'autre part, les normales en A et B, à la courbe que l'on considère, se coupent en un point D de la circonférence circonscrite au triangle ACB, et en désignant par σ l'arc ACB de cette circonférence, dont le diamètre est CD, on a

$$\alpha < \frac{\sigma}{CD},$$

d'où

$$(3) \quad \left(\frac{\alpha}{s} \right)^2 < \left(\frac{\sigma}{s} \right)^2 \cdot \frac{1}{CD^2}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les inégalités (2) et (3), il vient

$$\frac{s-c}{s^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{s} \right)^2 \frac{1}{CD}.$$

Or, $\frac{\sigma}{s} = \frac{\sigma}{c} : \frac{s}{c}$ tend vers l'unité, et CD tend vers le rayon de courbure R correspondant au point A, lorsque s tend vers zéro; donc on a

$$\lim \frac{s-c}{s^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2},$$

c. q. f. p., car la courbure en A est exprimée par $\frac{1}{R}$.

D'après cela :

La différence entre un arc infiniment petit de courbe plane et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins par rapport à l'arc.

Aux points d'inflexion où R est infini, $s - c$ est infiniment petite du cinquième ordre au moins, si l'on regarde $\frac{1}{R}$ comme un infiniment petit du même ordre que s; et notre démonstration tombe en défaut lorsque $R = 0$.

Courbes à double courbure.

Ce qui précède s'étend à des courbes à double courbure. En effet, soient

- AB un arc de courbe quelconque;
- s et c la longueur de cet arc et celle de sa corde;
- AC la projection de AB sur un plan P qui passe par le point A, différant du plan normal en ce point et ne coupant pas la courbe entre A et B;

σ et γ les longueurs de AC et de sa corde;
 AT et AS la tangente à AB en A, et la projection de
 cette tangente sur le plan P.

Supposons que le cylindre projetant se développe sur le
 plan TAS en même temps que AC se rectifie; et soient
 encore

AC' la partie de AS sur laquelle s'étend AC;

AB' ce que devient l'arc AB, et il faut admettre que la
 longueur de cet arc ne change pas dans le dé-
 veloppement du cylindre;

c' la longueur de la corde de AB';

enfin α et α' les angles BAC et B'AC'.

Les triangles rectangles ACB et AC'B' donnent

$$\gamma = c \cdot \cos \alpha, \quad \sigma = c' \cdot \cos \alpha';$$

et, par conséquent, on a

$$(1) \quad \frac{s}{c} = \frac{s}{c'} \cdot \frac{\sigma}{\gamma} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}.$$

Or, lorsque s tend vers zéro, $\frac{s}{c'}$ et $\frac{\sigma}{\gamma}$ tendent vers l'unité

(courbes planes), et $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$ tend aussi vers 1, car α et α'
 se rapprochent tous deux indéfiniment de l'angle TAS;
 donc on a

$$\lim \frac{s}{c} = 1,$$

comme pour une courbe plane.

Secondement, l'équation (1) donne

$$\frac{s - c}{s} = \frac{s \sigma \cdot \cos \alpha - c' \gamma \cdot \cos \alpha'}{s \sigma \cdot \cos \alpha},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{s-c}{s} = \frac{s-c'}{s} + \frac{\sigma-\gamma \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}}{\sigma-\gamma} \cdot \frac{c'}{s} \cdot \frac{\sigma-\gamma}{\sigma};$$

et, en divisant par s^2 , il vient

$$\frac{s-c}{s^2} = \frac{s-c'}{s^2} + \frac{\sigma-\gamma \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}}{\sigma-\gamma} \cdot \frac{c'}{s} \cdot \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2 \cdot \frac{\sigma-\gamma}{\sigma^2}.$$

s tendant vers zéro, $\frac{s-c'}{s^2}$ et $\frac{\sigma-\gamma}{\sigma^2}$ tendent vers de certaines limites qui sont finies en général et inférieures respectivement à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R'^2}$ et $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2}$, si l'on représente par R' et ρ les rayons de courbure de la transformée plane et de la projection de la courbe que l'on considère (courbes

planes); en même temps, $\frac{\sigma-\gamma \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}}{\sigma-\gamma}$, $\frac{c'}{s}$ et $\frac{\sigma}{s} = \frac{c'}{s} \cos \alpha'$ tendent vers l'unité; donc

$$\lim \frac{s-c}{s^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'^2} + \frac{1}{\rho^2} \right),$$

et, par conséquent :

La différence entre un arc infiniment petit de courbe quelconque et sa corde est infiniment petite du troisième ordre au moins, en général.

1845;

(Tome XII.)

un angle con-
sultion, et qui
est un cône. Lon-
gitude de la surface conique
est égale à la somme des ex-
térieurs du plan. Plan
de la surface. Lieu des
points qui se trouvent par le nom

1. Si un point m décrivait l'hélice en s'éloignant du sommet O du cône, à partir d'un point A de cette courbe, un point m' qui décrirait simultanément la projection de l'hélice sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône et passant par le sommet, en coïncidant toujours avec la projection de m sur ce plan, tournerait autour du sommet O dans un sens déterminé, facile à reconnaître d'après la position des points donnés A_0, A_1 , et qui va nous servir à fixer le sens de nos notations.

Les axes rectangulaires, que nous emploierons concurremment avec des coordonnées polaires, seront : Ox , la direction de Om' quand m part du point A ; Oy , la direction que prend la ligne Om' , de longueur variable, après avoir tourné de 90 degrés autour du point O ; et Oz , l'axe du cône (on ne considère qu'une des nappes de cette surface).

De plus, soient :

φ l'angle, positif des Ox vers Oy et négatif dans le sens opposé, qui aura été décrit par Om' sur $\widehat{xy}$ lorsque m sera parvenu sur l'hélice au point quelconque M ;

r la distance Om , et r' sa projection OM' sur $\widehat{xy}$;

$\varphi + d\varphi$, $r + dr$ et $r' + dr'$ ce que deviennent φ , r et r' quand m a décrit encore un arc infiniment petit MN de l'hélice, en continuant de se mouvoir dans le même sens que de A en M ;

ds l'arc MN considéré comme étant de même signe que φ et $d\varphi$;

β l'angle constant, que l'on peut supposer inférieur à 90 degrés, sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cône ;

α le demi-angle au sommet du cône.

La génératrice ON, en coupant le parallèle du cône qui passe par le point M, forme avec ce parallèle et avec l'hélice un *triangle conique* MIN, dont les côtés sont égaux à $\pm dr$, $\pm r' d\varphi$ et $\pm ds$, les signes supérieurs répondant à $\varphi > 0$, et les signes inférieurs à $\varphi < 0$; aux infiniment petits du second ordre près, ce triangle conique doit être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en I, et ayant en N un angle égal à β ; donc on a

$$(1) \quad dr = r' d\varphi \cdot \cot \beta \quad \text{et} \quad dr = ds \cdot \cos \beta.$$

Le triangle OM'M fournit d'ailleurs

$$r' = r \sin \alpha;$$

et, par conséquent, la première des équations précédentes devient

$$(2) \quad dr = r d\varphi \cdot \sin \alpha \cot \beta,$$

dont l'intégrale est

$$(3) \quad r = C \cdot e^{\varphi \sin \alpha \cot \beta},$$

e désignant la base des logarithmes népériens, et C une ligne qu'il faut déterminer ainsi que l'angle β , de manière que l'hélice passe par les points donnés A_0, A_1 .

L'équation (3) suffit pour représenter l'hélice en coordonnées polaires, parce que le rayon vecteur r fait constamment avec Oz l'angle α , ce qui rend inutile l'introduction d'une troisième coordonnée.

Pour déterminer C et β , on a

$$r_0 = C e^{\varphi_0 \sin \alpha \cot \beta} \quad \text{et} \quad r_1 = C e^{\varphi_1 \sin \alpha \cot \beta},$$

en désignant par φ_0, r_0 et φ_1, r_1 , les valeurs de φ et r qui répondent aux points A_0, A_1 ; et l'on déduit de ces équations

$$\tan \beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{r_1 - r_0} \cdot \sin \alpha, \quad C = r_0^{\frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0}} \cdot r_1^{-\frac{\varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0}}.$$

La première de ces formules ne fournit pour β une valeur inférieure à $\frac{\pi}{2}$, lorsque $r_1 > r_0$ (ce qu'on peut toujours admettre, puisque A_1 désigne celui des points donnés que l'on veut), que si $\varphi_1 > \varphi_0$; or, cela dépend du sens dans lequel φ est positif, et la condition $\varphi_1 > \varphi_0$, pour $r_1 > r_0$, détermine précisément ce sens de la manière convenue plus haut.

Nous conserverons les lettres β et C dans le reste du calcul, en supposant qu'elles représentent les valeurs déterminées par les formules qui précèdent.

L'équation polaire de la projection de l'hélice sur $\hat{xy}$ (pôle O , axe Ox) s'obtient en substituant $\frac{r'}{\sin \alpha}$ à r dans l'équation (3), ce qui donne

$$(4) \quad r' = C \sin \alpha \cdot e^{\varphi \sin \alpha \cot \beta};$$

on voit donc que :

La projection de l'hélice conique sur tout plan perpendiculaire à l'axe du cône est une spirale logarithmique.

2. On peut arriver directement à la conclusion qui précède, former premièrement l'équation (4), et en déduire l'équation (3). Pour cela, soient :

P un point quelconque de l'hélice, différent de M ;

P' la projection de P sur $\hat{xy}$;

MD et PE les tangentes à l'hélice en M et P ;

$M'D'$ et $P'E'$ les projections de ces tangentes sur $\hat{xy}$.

Si l'on fait tourner le plan OPE autour de Oz , lorsque OP sera dans la direction de OM , ce plan coïncidera avec le plan OMD , puisqu'ils touchent tous deux le cône, l'un suivant OP , l'autre suivant OM ; et, pourvu que le sens de la rotation soit convenable, PE sera alors parallèle à $\hat{OM}$, car les angles OPE , OMD , devenus correspondants,

sont égaux. Cela posé, concevons que les projections de OP et de PE suivent le mouvement de ces droites; OP' sera dans la direction de OM' en même temps que OP dans celle de OM, et P'E' sera alors parallèle à M'D', puisque PE est parallèle à MD, ainsi qu'il vient d'être dit; l'angle OP'E' est donc égal à OM'D', car le premier est devenu correspondant au second par l'effet seul de la rotation. Or ce raisonnement prouve bien que la projection de l'hélice conique sur $\hat{xy}$ est une spirale logarithmique, puisque la propriété essentielle de ce genre de spirales est de couper tous les rayons vecteurs sous un angle constant.

Afin d'avoir la cotangente de l'angle OM'D', qu'il faut connaître pour écrire l'équation de la spirale, il suffit de remarquer que MD et M'D' se rencontrent en un point K de la trace du plan OMD sur $\hat{xy}$, et que les triangles MOK, M'OK sont rectangles en O; en effet, il résulte de là que

$$\cot OM'D' : \cot OMD, \text{ ou } \cot \beta :: r' : r, \text{ ou } :: \sin \alpha : 1,$$

d'où

$$\cot OM'D' = \sin \alpha \cot \beta.$$

D'après cela, la spirale peut être représentée par l'équation (4).

Lorsque l'on considère avec un peu de soin la rotation qui vient d'être indiquée, on voit que l'angle P'PE est égal à M'MD, car les côtés de ces angles deviennent parallèles chacun à chacun; ainsi :

L'hélice conique coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre parallèle à l'axe du cône qui la projette sur $\hat{xy}$.

Le cosinus de l'angle constant, qui est M'MD pour le point M, s'obtient facilement; en effet, les triangles rec-

angles $KM'M$, $OM'M$ et KOM donnent

$$\cos M'MD = \frac{MM'}{MK}, \quad MM' = r \cos \alpha \quad \text{et} \quad MK = \frac{r}{\cos \beta},$$

d'où

$$\cos M'MD = \cos \alpha \cos \beta.$$

Cette propriété de l'hélice conique est très-remarquable; on verra plus loin comment on en déduit la direction du rayon de courbure et le plan osculateur.

3. *Longueur d'un arc.* b et b_1 étant les rayons vecteurs des extrémités d'un arc BB_1 de l'hélice, la seconde des équations (1) donne, en intégrant de $r = b$ jusqu'à $r = b_1$,

$$(5) \quad \text{arc } BB_1 = \frac{b_1 - b}{\cos \beta},$$

si l'on suppose $b_1 > b$; donc la longueur d'un arc quelconque de l'hélice conique est représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est la différence des rayons vecteurs des extrémités de cet arc, et dans lequel l'angle aigu adjacent à ce côté est égal à β .

On pourrait aussi déduire la longueur de l'arc BB_1 de celle de l'arc $B'B'_1$ de spirale logarithmique, qui est la projection de BB_1 sur $\hat{xy}$; car, en désignant par ds' l'élément $M'N'$ considéré comme de même signe que $d\varphi$, on a évidemment

$$ds = \frac{ds'}{\sin M'MD}$$

à un infiniment petit d'un ordre supérieur près, et puisque $M'MD$ est un angle constant,

$$\text{arc } BB_1 = \frac{\text{arc } B'B'_1}{\sin M'MD}.$$

4. *Aire du fuseau conique défini dans l'énoncé.* La

surface du triangle conique MIN est infiniment petite par rapport à celle du fuseau MON, car MIN est moindre que le quadrilatère MINI' dont l'aire est exprimée par $\left(r + \frac{dr}{2}\right) dr d\varphi \cdot \sin \alpha$, tandis que MON surpasse MOI dont l'aire est exprimée par $\frac{1}{2} r^2 d\varphi \cdot \sin \alpha$. Si l'on désigne par du le fuseau MON considéré comme de même signe que φ , on a donc

$$(6) \quad du = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \cdot \sin \alpha,$$

à un infiniment petit d'un ordre supérieur près, et, en remplaçant $d\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$du = \frac{1}{2} r dr \cdot \tan \beta.$$

Or cette équation donne, en intégrant de $r = b$ jusqu'à $r = b_1$, et dans l'hypothèse que $b_1 > b$,

$$\text{fus. BOB}_1 = \frac{b_1^2 - b^2}{4} \cdot \tan \beta.$$

On pourrait encore déduire la valeur du fuseau BOB₁ de celle du secteur B'OB' de la spirale logarithmique, car on voit facilement que $\text{fus. BOB}_1 = \frac{\text{sect. B'OB}'_1}{\sin \alpha}$.

5. *Transformée plane.* Le cône étant posé sur un plan fixe, de manière qu'il touche ce plan suivant une génératrice, si on le fait rouler sans glisser, le lieu des points du plan sur lesquels viennent successivement se mettre ceux de l'hélice conique est la transformée plane de cette courbe.

On voit sans peine qu'une tangente MD à l'hélice, entraînée dans le mouvement du cône, se confondra avec la

tangente à la transformée au point μ correspondant à M, en même temps que OM se placera sur $O\mu$, et sans que l'angle OMD change de grandeur (le sommet O du cône ne se déplace pas sur le plan, parce qu'il n'y a pas de glissement); donc :

La transformée plane de l'hélice conique est une spirale logarithmique qui coupe ses rayons vecteurs sous l'angle β .

D'après cela, si O' est la position du sommet du cône sur le plan, et $O'A'$ la droite sur laquelle se place la génératrice OA (1), en prenant O' pour pôle, $O'A'$ pour axe polaire, et désignant par ψ l'angle $A'O'\mu$ considéré comme de même signe que φ , ce qui revient à poser $\varphi \sin \alpha = \psi$, l'équation de la transformée est

$$r = C.e^{\psi \cdot \cot \beta}.$$

6. *Plan osculateur.* Lorsque l'équation $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$ est vérifiée pour tous les points d'une courbe, c'est-à-dire quand cette courbe coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette sur $\hat{xy}$; la formule connue $\cos \nu = \rho \cdot D_s \frac{dz}{ds}$ du cosinus de l'angle ν que le rayon vecteur ρ correspondant au point quelconque (x, y, z) de la courbe fait avec l'axe des z , donne

$$\cos \nu = 0, \quad \text{d'où} \quad \nu = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, 1° le rayon de courbure est parallèle à $\hat{xy}$, et dirigé suivant la trace du plan normal dans lequel il est compris, sur le plan parallèle à $\hat{xy}$ conduit par le point (x, y, z) , de sorte qu'il est perpendiculaire au plan qui touche en ce point le cylindre projetant; 2° comme le plan osculateur est, en général, déterminé par la tangente

et par la direction du rayon de courbure, le plan osculateur en (x, y, z) à une courbe qui remplit la condition exprimée par l'équation $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$, est le plan conduit suivant la tangente à cette courbe perpendiculairement au plan qui touche en (x, y, z) le cylindre projetant. Enfin, on voit encore sans difficulté que la trace du plan osculateur sur $\hat{xy}$ est perpendiculaire à la projection de la tangente, et l'on conclut de là que l'inclinaison du premier plan sur le second est égale à l'inclinaison de la tangente sur celui-ci.

Or, en vertu de la remarque qui termine l'art. 2, tout ce que nous venons de dire s'applique à l'hélice conique, et fournit en descriptive une construction très-simple du plan osculateur, dont l'inclinaison constante sur $\hat{xy}$, représentée par $M'KM$ pour le point M , est d'ailleurs donnée par la formule $\sin M'KM = \cos \alpha \cos \beta$, d'après la valeur qui a été obtenue pour $\cos M'MD$ (2). On pourrait même arriver, par ces seules considérations, à l'équation du plan osculateur; mais, à cause d'une ambiguïté de signes assez difficile à écarter, il est préférable de suivre pour cela les principes généraux.

Les coordonnées rectangulaires du point M sont exprimées par $r \sin \alpha \cos \varphi$, $r \sin \alpha \sin \varphi$ et $r \cos \alpha$, de sorte que l'équation du plan osculateur est de la forme

$A(x - r \sin \alpha \cos \varphi) + B(y - r \sin \alpha \sin \varphi) + z - r \cos \alpha = 0$,
 x, y, z désignant les coordonnées de ce plan, et A, B des fonctions inconnues de φ et r . Pour déterminer A et B , on doit différentier deux fois cette équation par rapport à φ et r , en regardant x, y, z comme des constantes, ce qui donne d'abord

$$A(\sin \varphi - \sin \alpha \cot \beta \cos \varphi) - B(\cos \varphi + \sin \alpha \cot \beta \sin \varphi) - \cos \alpha \cot \beta = 0,$$

après qu'on a remplacé $\frac{dr}{d\varphi}$ par sa valeur tirée de l'équation (2) et supprimé le facteur $r \sin \alpha$, puis

$$A (\cos \varphi + \sin \alpha \cot \beta \sin \varphi) + B (\sin \varphi - \sin \alpha \cot \beta \cos \varphi) = 0.$$

En tirant de ces deux équations les valeurs de A et B, et en substituant ces valeurs dans la précédente, on obtient

$$(O) \left\{ \begin{array}{l} (\sin \varphi - \sin \alpha \cot \beta \cdot \cos \varphi) x - (\cos \varphi + \sin \alpha \cot \beta \cdot \sin \varphi) y \\ + \frac{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos \alpha \sin \beta \cos \beta} \cdot z = r \tan \beta. \end{array} \right.$$

Si l'on remarque que le coefficient angulaire $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ de la projection de la tangente en M sur $\hat{xy}$ est

$$\tan(\varphi + OM'D') = - \frac{\cos \varphi + \sin \alpha \cot \beta \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi - \sin \alpha \cot \beta \cdot \cos \varphi},$$

on vérifie sans peine, d'après l'équation (O), et par rapport à l'hélice conique, ce qui a été établi au début de cet article relativement au plan osculateur de toute courbe qui coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre projetant sur $\hat{xy}$; on trouve aussi que le sinus de l'inclinaison du plan osculateur de l'hélice sur $\hat{xy}$ est exprimé par $\cos \alpha \cdot \cos \beta$; enfin, on peut remarquer que le z à l'origine est proportionnel au rayon vecteur r .

7. *Rayon de courbure.* Nous avons fixé d'une manière générale, au commencement de l'article qui précède, la direction du rayon de courbure des courbes qui satisfont à l'équation $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$, et, par conséquent, celle du rayon de courbure de l'hélice conique; nous remarquons seulement encore que la projection de ce rayon sur $\hat{xy}$ tombe dans la direction de celui de la spirale logarith-

mique suivant laquelle l'hélice se projette sur ce plan. Pour avoir la direction du rayon de courbure de l'hélice en un point M de cette courbe, dont la projection sur $\hat{x}\hat{y}$ est M', on mènera donc la normale en M' à la spirale logarithmique (*).

Afin de déterminer la grandeur du rayon de courbure, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Les rayons de courbure de toute courbe qui satisfait à l'équation $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$ sont proportionnels à ceux de sa projection sur $\hat{x}\hat{y}$.

En suivant toujours les notations qui ont été adoptées, une formule connue donne

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

car $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ d'après l'hypothèse ; et l'on a d'ailleurs

$$\rho' = \left[\left(\frac{d^2x}{ds'^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds'^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$ds' = kds,$$

si l'on désigne par ρ' , ds' et k le rayon de courbure de la projection au point (x, y) , l'élément correspondant ds' de cette courbe, et la valeur constante du cosinus de l'inclinaison sur $\hat{x}\hat{y}$ de la tangente en (x, y, z) à la courbe à double courbure. Or, en remplaçant ds' par kds dans l'expression de ρ' , et en comparant le résultat avec l'expression de ρ , on a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k^2},$$

C. Q. F. P.

(*) En descriptive, on obtient la direction de M'D' par la construction

[Nous avons cru devoir établir cette proposition avec toute l'étendue qu'elle comporte, comme nous l'avons fait pour celles qui précèdent et qui sont relatives au plan osculateur ainsi qu'au rayon de courbure.]

D'après cela, ρ représentant maintenant le rayon de courbure de l'hélice conique, on obtient de suite

$$(\rho) \quad \rho = \frac{r \sin \alpha}{\sin \beta \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}};$$

car on a pour la spirale logarithmique,

$$\rho' = \frac{r'}{\sin OM'K} \quad (\text{formule connue}),$$

et, d'autre part, $r' = r \sin \alpha$,

$$\sin OM'K = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \cot^2 \beta}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

enfin

$$k^2 = 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (1 \text{ et } 2).$$

Ainsi,

Le rapport $\frac{\rho}{r}$ du rayon de courbure au rayon vecteur de l'hélice conique est constant.

Mais, pour construire géométriquement le rayon de courbure en M, il convient de prendre

$$\rho = \frac{OM' \cdot \overline{MK}^2}{OK \cdot M'K},$$

qu'on déduit aussi de

$$\rho = \frac{\rho'}{k^2} \quad \text{et de} \quad \rho' = \frac{OM'}{\sin OM'K},$$

du point K : OK est perpendiculaire à OM', et l'on a sa longueur, en décrivant un triangle égal à OMK dans lequel on connaît le côté OM et l'angle adjacent OMK = β .

D.

en remarquant que

$$\sin OM'K = \frac{OK}{M'K} \quad \text{et} \quad k = \sin M'MK = \frac{M'K}{MK}.$$

Les coordonnées du centre de courbure dépendent de l'équation (O) du plan osculateur, de l'équation du plan normal,

$$(N) \quad \begin{cases} (\sin \varphi - \sin \alpha \cot \beta \cos \varphi) x \\ -(\cos \varphi + \sin \alpha \cot \beta \sin \varphi) y - \cos \alpha \cot \beta \cdot z + r \cot \beta = 0, \end{cases}$$

et de

$$(N') \quad \begin{cases} (\cos \varphi + \sin \alpha \cot \beta \sin \varphi) x \\ +(\sin \varphi - \sin \alpha \cot \beta \cos \varphi) y + r \sin \alpha \cot^2 \beta = 0, \end{cases}$$

que l'on déduit de la précédente en la différentiant par rapport à φ et r , puis en remplaçant $\frac{dr}{d\varphi}$ par sa valeur tirée de l'équation (2). Les valeurs de x, y, z , qui satisfont à ces trois équations, sont assez compliquées, et il n'est pas nécessaire de les employer pour former l'expression du rayon de courbure : on voit en effet, avec un peu d'attention, que le plan (N') est perpendiculaire aux traces des deux autres plans sur $\hat{x}\hat{y}$, par conséquent, au rayon de courbure; et qu'ainsi ce rayon est la distance de M au plan (N'), ou de M' à la trace de ce plan sur $\hat{x}\hat{y}$, de sorte qu'on peut l'obtenir par la formule de la distance d'un point à une droite (en géométrie plane), en considérant seulement l'équation (N').

8. *Lieu des centres de courbure.* Soient F et G les centres de courbure qui répondent aux points M et P de l'hélice conique. Si l'on fait tourner autour de Oz, de la manière indiquée dans l'art. 2, la génératrice OP, le plan OPE qui touche le cône suivant OP, et le rayon de courbure PG; PG sera parallèle à MF lorsque le plan

OPE coïncidera avec OMD, qui touche le cône suivant OM, car PG reste perpendiculaire à OPE, et MF est perpendiculaire à OMD: ainsi l'angle $OPG = OMF$.

Comme on a d'ailleurs (7) $\frac{PG}{OP} = \frac{MF}{OM}$, les triangles POG,

MOF sont semblables; de sorte que OG sera dirigé suivant OF, après la rotation, et que l'angle $GOz = FOz$, puisque GOz ne varie pas pendant que OG tourne autour de Oz. Donc les points F, G, ..., sont sur un cône de révolution, dont Oz est l'axe et O le sommet. D'autre

part, F' étant la projection de F sur $\hat{xy}$, l'angle en M' du triangle F'OM' est complémentaire de l'angle constant OM'D', et le rapport $\frac{M'F'}{M'O}$, ou $\frac{\rho'}{\rho}$ des côtés qui

comprennent cet angle est aussi constant (7); par conséquent, il en est de même de l'angle F'OM', ainsi que du rapport $\frac{OF'}{OM}$, c'est-à-dire que cet angle et ce rapport ne

varient pas avec la position du point M' sur la spirale logarithmique. Donc, le lieu des points M', ..., est une spirale semblable à la projection de l'hélice sur $\hat{xy}$.

Or, il résulte évidemment de là, d'après ce qui a été dit dans les art. 1 et 2, que

Le lieu des centres de courbure de l'hélice conique est une autre hélice de même espèce, située sur un cône de même axe et de même sommet.

Si l'on désigne par γ et λ les angles M' et O du triangle F'OM', on a

$$\frac{\sin(\gamma + \lambda)}{\sin \lambda}, \text{ ou } \cos \gamma + \sin \gamma \cot \lambda = \frac{\rho'}{\rho};$$

en remplaçant $\sin \gamma$ ainsi que $\cos \gamma$ par leurs valeurs tirées de $\tan \gamma = \sin \alpha \cot \beta$, et $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{r \sin \alpha}{\rho}$ par sa valeur

tirée de la formule (ρ) , il vient

$$\operatorname{tang} \lambda = - \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta}.$$

Nous supposons, dans ce qui suit, que λ représente l'arc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π qui est déterminé par cette formule.

Soient encore ψ et R' les coordonnées polaires du point F' . On a évidemment

$$\varphi = \psi - \lambda,$$

et le triangle $F'OM'$ donne

$$r' = R' \frac{\sin(\gamma + \lambda)}{\sin \gamma} = R' (\cos \lambda + \sin \lambda \cot \gamma),$$

ce qui devient

$$r' = R' \operatorname{tang} \beta \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}},$$

après quelques réductions, en remplaçant $\sin \lambda$, $\cos \lambda$ par leurs valeurs tirées de celle de $\operatorname{tang} \lambda$ et $\cot \gamma$ par $\frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin \alpha}$. Il n'y a plus maintenant qu'à porter ces valeurs de φ et r' dans l'équation (4) pour avoir l'équation polaire de la projection sur $\hat{x}\gamma$ du lieu des centres de courbure; on obtient ainsi

$$R' = C \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tang} \beta} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \cdot e^{(\psi - \lambda) \sin \alpha \cot \beta}.$$

Enfin, α' étant le demi-angle au sommet du cône sur lequel se trouve le lieu des centres de courbure, β' l'angle constant sous lequel cette courbe coupe les génératrices

de ce cône, et R le rayon vecteur du point F , on a

$$\begin{aligned}\tan \alpha' &= \frac{R' \tan \alpha}{r'} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}, \\ \tan \beta' &= \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \tan \beta,\end{aligned}$$

et

$$R = C \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot e^{(\psi - \lambda) \sin \alpha \cot \beta};$$

cette dernière équation est l'équation polaire (dans l'espace) du lieu des centres de courbure. Tout cela peut d'ailleurs être déduit des équations (O), (N) et (N').

Notes.

I. L'hélice conique, comme l'hélice dont on trouve la monographie dans les *Traité de calcul différentiel*, appartient à la classe fort remarquable des courbes qui coupent sous un angle constant les méridiennes d'une surface de révolution, et qu'on nomme, en général, des *loxodromies*.

Si l'on convient de désigner par r l'arc de méridienne OM compris entre le sommet O d'une surface de révolution quelconque, et le point M d'une loxodromie tracée sur cette surface, par r' la distance de M à l'axe Oz, qui est l'ordonnée de la méridienne en prenant Oz pour axe des abscisses, et de conserver le reste des notations expliquées dans l'art. 1, on voit immédiatement que les équations (1) conviennent à toute loxodromie.

Les variables φ et r forment un système particulier de coordonnées dont l'une s'exprime en fonction de l'autre par une simple quadrature, lorsqu'on a r' en fonction de r . Ainsi, par exemple, sur une sphère de rayon égal à l'unité de longueur,

$$r' = \sin r,$$

(98.)

et la première des équations (1) donne

$$d\varphi = \frac{dr}{\sin r} \cdot \tan \beta,$$

d'où

$$\varphi = \text{const} + \tan \beta \cdot l \left(\tan \frac{r}{2} \right).$$

On déduit toujours la formule (5) de la seconde des équations (1), et, par conséquent, *la rectification d'un arc BB₁ de loxodromie ne dépend que de celle de l'arc de la méridienne compris entre les parallèles de la surface qui passent par les points B et B₁.*

II. Comme l'hélice conique coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette parallèlement à l'axe du cône, nous avons pu nous servir de quelques propriétés qui appartiennent, en général, aux hélices cylindriques dont l'hélice qu'on étudie ordinairement n'est qu'un cas particulier. Voici l'énoncé du théorème sur lequel nous nous sommes appuyés :

Le rayon de courbure d'une hélice cylindrique a, en chaque point, la même direction que le rayon de courbure de la section droite du cylindre, et ces deux rayons sont dans un rapport constant.

La réciproque de la première partie est vraie.

On déduit de ce théorème le corollaire suivant :

Le plan osculateur d'une hélice cylindrique est en chaque point perpendiculaire au plan qui touche le cylindre, et réciproquement.

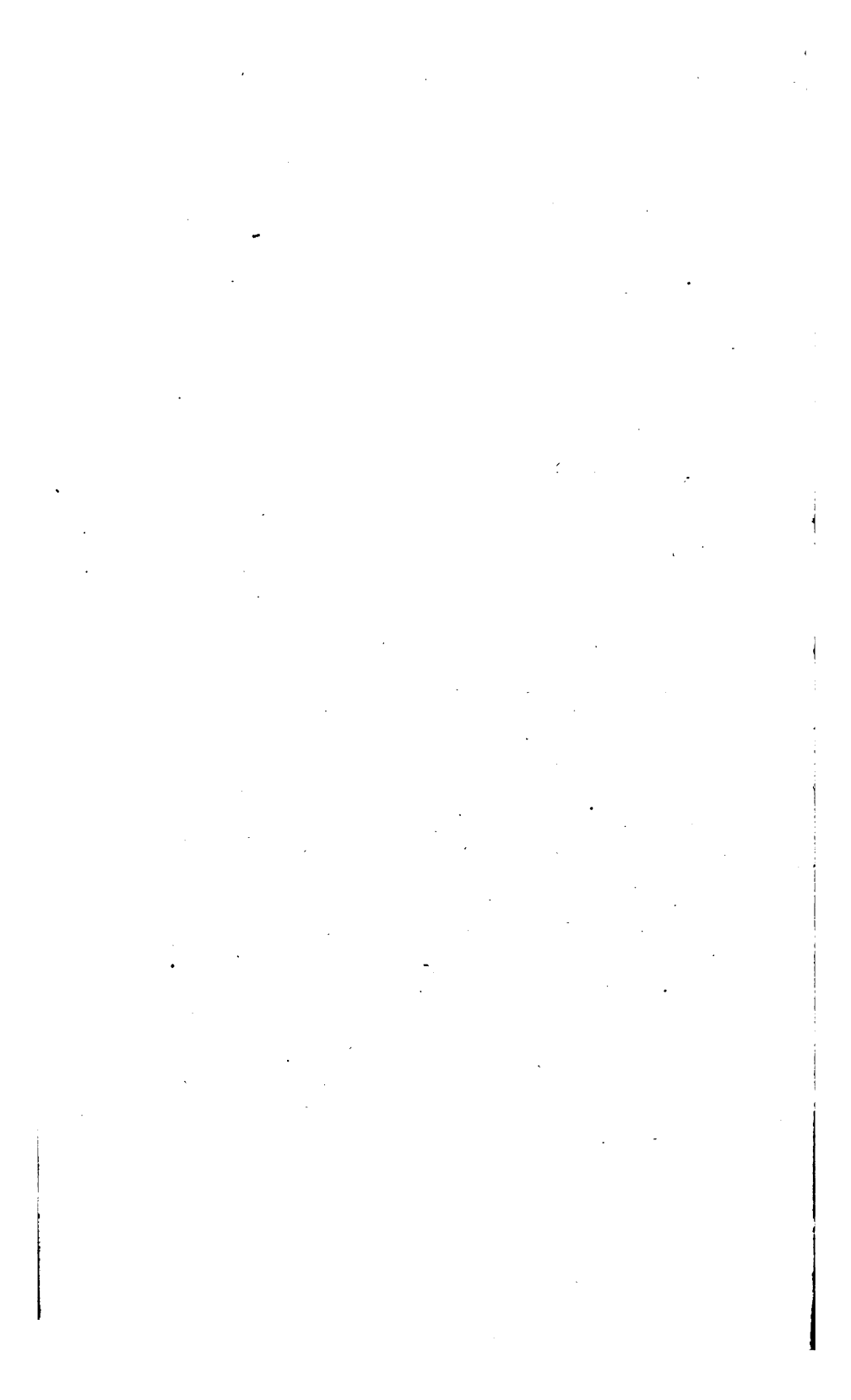
III. *Le lieu des traces des tangentes à l'hélice conique sur le plan $\hat{x}\hat{y}$ est une spirale semblable à la projection de l'hélice sur ce plan, et ce lieu est l'enveloppe de la trace du plan osculateur.*

En effet :

1°. L'angle $M'OK$ est toujours droit, et l'on a

$$\frac{OK}{r'} = \tan OM'K = \text{const.}$$

2°. La trace sur $\hat{x}\hat{y}$ du plan osculateur en M à l'hélice conique passe par le point K, et elle fait avec OK un angle égal à $OM'K$, puisqu'elle est perpendiculaire à $M'K$, de sorte qu'elle est tangente au lieu des points K.



CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1848;

PAR M. DIEU,

Agrégré, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Un cylindre droit à bases circulaires, de matière hétérogène, mais dont tous les points situés sur une même droite parallèle à l'axe ont la même densité, est posé sur un plan horizontal. Déterminer le mouvement qu'il prend sous l'action de la pesanteur, et en particulier le mouvement du centre de gravité, ainsi que celui d'un point quelconque du rayon qui passe par ce centre. On fera abstraction du frottement.

I. Lorsqu'un cylindre droit quelconque, posé par une arête sur un plan horizontal sans frottement, de manière que son centre de gravité ne soit pas dans le plan vertical de l'arête de contact, est abandonné sans vitesse à l'action de la pesanteur, les arêtes ne doivent pas changer de direction pendant le mouvement qu'il prend, et les bases doivent rester toujours dans les plans verticaux où elles se trouvent d'abord; car les forces qui donneraient à chaque instant à ce corps supposé libre le mouvement qu'il a dans son état réel, savoir : son poids et la résistance du plan d'appui suivant l'arête de contact, sont des forces *verticales* qui ne peuvent conséquemment ni faire tourner autour d'un axe vertical, ni faire glisser dans la direction horizontale des arêtes.

Quand le cylindre est formé de *filets* homogènes parallèles aux arêtes, son mouvement ne dépend pas de sa hauteur, ou, en d'autres termes, un tronçon compris entre deux plans perpendiculaires aux arêtes, s'il était
D.

détaché du reste, prendrait d'abord et aurait continuellement ensuite un mouvement identique à celui qu'il a dans son état réel. En effet, si le cylindre, au moment où on le pose sur le plan, était coupé en un nombre quelconque de tronçons égaux par des plans perpendiculaires aux arêtes, et si ces tronçons étaient sans action les uns sur les autres, il est clair qu'ils prendraient tous le même mouvement; or la juxtaposition des parties ne saurait altérer ce mouvement commun, car elle ne peut produire ou amener aucun frottement, et il ne sera pas altéré davantage par la liaison complète qui reconstitue le cylindre.

D'après cela, il suffit pour résoudre le problème proposé de considérer un tronçon détaché du cylindre par deux plans perpendiculaires aux arêtes; nous pourrions supposer ce tronçon infiniment mince et le regarder comme un cercle composé de points matériels inégalement pesants, puisque le cylindre dont il s'agit est de révolution; enfin nous pourrions prendre la section circulaire contenant le centre de gravité G du cylindre, qui est équidistante de ses bases, et dont le point G sera aussi le centre de gravité.

II. Soient, à la fin du temps t écoulé depuis que le mouvement a commencé,

C la position du centre du cercle qui touche alors en A le plan horizontal;

M un des points matériels dont il se compose;

f la force variable, dirigée suivant AC , qui représente la résistance du plan:

et, par rapport à la trace invariable du plan du cercle sur le plan horizontal et à un axe vertical, pris pour axes des x et des y d'origine O , soient

x' l'abscisse des points A et C (l'ordonnée de C est toujours égale au rayon);

x_1, y_1 les coordonnées de G ;

x, y celles de M. (Ces deux dernières varient avec le temps comme les précédentes, de plus avec la position de M dans le cercle.)

Nous désignerons en outre par a le rayon du cercle, par m sa masse et par μ celle du point matériel M.

En appliquant au cercle la force f , on peut le considérer comme libre et l'on a les équations

$$(1) \quad \Sigma. \mu \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

$$(2) \quad f - mg - \Sigma. \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

$$(3) \quad x'f - mgx_1 + \Sigma. \mu \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0,$$

qui expriment l'équilibre des forces perdues. (g représente la gravité et le signe Σ indique une somme qui s'étend à tous les points du cercle.)

On déduit immédiatement de l'équation (1) que $x_1 = \alpha$, α étant une constante, car $\frac{dx}{dt}$ est nul pour $t = 0$.

Donc *le centre de gravité du cylindre ne quittera pas la verticale sur laquelle il se trouve d'abord, et ne pourra que s'élever ou s'abaisser sur cette droite.*

L'élimination de f entre les équations (2) et (3) donne

$$(4) \quad mg(x' - \alpha) + x'. \Sigma. \mu \frac{d^2 y}{dt^2} + \Sigma. \mu \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0,$$

en remplaçant x_1 par α .

Soient encore :

r et θ les coordonnées polaires du point quelconque M du cercle par rapport à l'axe vertical CA et au point C pris pour pôle (θ est positif en tournant autour de C dans le même sens que de Ox vers Oy autour du point O) ;

r_1 et θ_1 les coordonnées polaires du centre de gravité G.

r_1 est constant, r ne varie qu'avec la position de M dans le cercle, θ_1 qu'avec le temps, et θ varie des deux manières.

On a évidemment

$$(5) \quad \begin{cases} x' = \alpha - r_1 \sin \theta_1, \\ x = \alpha - r_1 \sin \theta_1 + r \sin \theta, \\ y = a - r \cos \theta. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs de x' , x et y dans l'équation (4), en ayant égard à ce que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt}, \quad \Sigma \mu r \cos \theta = m r_1 \cos \theta_1, \dots,$$

ainsi qu'au mode de variation de r , θ et θ_1 , et mettant $m(k^2 + r_1^2)$ au lieu de $\Sigma \mu r^2$ (moment d'inertie du cercle par rapport à son centre), il vient, toutes réductions faites,

$$(6) \quad (k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1) \cdot \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + r_1^2 \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 + g r_1 \sin \theta_1 = 0.$$

Cette équation est susceptible d'abaissement, car elle ne contient pas t d'une manière explicite; pour arriver de suite à une équation linéaire du premier ordre, il suffit de poser

$$\frac{d\theta_1}{dt} = (2\zeta)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = \frac{d\zeta}{d\theta_1}.$$

En substituant dans l'équation (6), on trouve

$$(7) \quad \frac{d\zeta}{d\theta_1} + \frac{2r_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1} \cdot \zeta + \frac{g r_1 \sin \theta_1}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1} = 0.$$

L'intégrale de cette équation s'obtient par un calcul connu : c'est

$$\zeta = \frac{C_1 + g r_1 \cos \theta_1}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1};$$

et, en déterminant l'arbitraire C_1 de manière à ce que, pour $t = 0$, $\theta_1 = \theta_0$ et $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$ (θ_0 est la valeur initiale donnée de θ_1), on arrive à

$$(8) \quad \frac{d\theta_1}{dt} = \mp \sqrt{2gr_1} \cdot \sqrt{\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1}}.$$

La forme de cette équation montre l'impossibilité d'exprimer t en fonction de θ_1 autrement que par une série ou une intégrale définie, et d'avoir θ_1 en fonction de t ; mais cela ne serait nécessaire que pour assigner à chaque instant la position du cylindre, et, comme on va le voir, la discussion de quelques-unes des équations précédentes, ainsi que de

$$(9) \quad r_1 = a - r_1 \cos \theta_1,$$

achève de faire connaître toutes les circonstances du mouvement.

III. Il faut remarquer d'abord que si θ_1 ne restait pas entre θ_0 et $-\theta_0$, l'expression (8) de $\frac{d\theta_1}{dt}$ deviendrait imaginaire, ce qui ne doit pas arriver; qu'ainsi, en supposant $\pi > \theta_0 > 0$, on doit prendre premièrement le signe — devant le radical, dans le second membre de l'équation (8), afin que $d\theta_1$ soit négative jusqu'à ce qu'on ait $\theta_1 = -\theta_0$, puis le signe +, afin que $d\theta_1$ soit positive jusqu'à ce qu'on soit revenu à $\theta_1 = \theta_0$, et ainsi de suite alternativement. Cela posé :

1°. D'après l'équation (8), la vitesse angulaire relative du cercle autour de son centre C, représenté par le second membre de cette équation, est *maxima* (abstraction faite du signe) et égale à $2 \frac{\sqrt{gr_1}}{k} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2}$ pour $\theta_1 = 0$, *minima* et nulle pour $\theta_1 = \pm \theta_0$, et cette vitesse est la même,

D. *

sauf le sens, pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. Donc

Abstraction faite du mouvement de l'axe du cylindre, ce corps oscille autour de cette droite entre deux positions symétriques par rapport au plan vertical qui la contient; les oscillations sont isochrones et se composent chacune de deux parties égales.

L'amplitude de ces oscillations est $2\theta_0$, et leur durée T sera donnée par la formule

$$T = 2 \sqrt{2gr_1} \cdot \int_0^{\theta_0} d\theta \cdot \sqrt{\frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

2°. La plus petite et la plus grande valeur de x' que donne la première des équations (5) sont $\alpha - r_1 \sin \theta_0$ et $\alpha + r_1 \sin \theta_0$ qui répondent à $\theta_1 = \pm \theta_0$, et cette équation fournit des valeurs de x' équidifférentes de α pour celles de θ_1 qui sont équidifférentes de zéro. En outre, on déduit de la même équation et de l'équation (8)

$$\frac{dx'}{dt} = \pm r_1 \sqrt{2gr_1} \cdot \cos \theta_1 \cdot \sqrt{\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1}},$$

ce qui montre que la vitesse du centre C sur la droite $y = a$ est toujours égale à la vitesse angulaire relative autour de ce centre, multipliée par la projection de CG sur la verticale Oy ; ainsi $\frac{dx'}{dt}$ est nul pour $\theta_1 = \pm \theta_0$, atteint (abstraction faite du signe) son maxima

$$2r_1 \frac{\sqrt{gr_1}}{k} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2}$$

pour $\theta_1 = 0$, et prend des valeurs absolues égales pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. Donc

L'axe du cylindre oscille parallèlement à sa première position (I), dans le plan horizontal où il doit toujours

rester, entre cette position et une autre située à la distance $2r_1 \sin \theta_0$ de celle-là; ces oscillations coïncident avec les précédentes, ont même durée et sont aussi formées de deux parties égales.

3°. D'après l'équation (9), les valeurs extrêmes de y_1 sont $\alpha - r_1 \cos \theta_0$ et $\alpha - r_1$ qui répondent à $\theta_1 = \pm \theta_0$ et $\theta_1 = 0$, et y_1 prend des valeurs égales pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. De plus, cette équation et l'équation (8) donnent

$$\frac{dy_1}{dt} = \mp r_1 \sqrt{2gr_1} \sin \theta_1 \cdot \sqrt{\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1}},$$

d'où il suit que $\frac{dy_1}{dt}$ est nulle pour $\theta_1 = \pm \theta_0$ et $\theta_1 = 0$, nécessairement *maxima* (abstraction faite du signe) pour de certaines valeurs de θ_1 entre 0 et $\pm \theta_0$, et prend des valeurs qui diffèrent seulement par le signe pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro entre lesquelles on n'a qu'une fois $\theta_1 = 0$. Donc

Le centre de gravité G oscille sur la verticale de sa position primitive [$x_1 = \alpha$, II], en descendant d'abord de $r_1(1 - \cos \theta_0)$, puis remontant de la même quantité; et ces oscillations coïncident encore avec celles qui se font autour de l'axe du cylindre.

4°. Pour un point M' du rayon qui passe par le centre de gravité G, à la distance r' du point C, les deux dernières des équations (5) donnent

$$(10) \quad x - \alpha = (r' - r_1) \sin \theta_1, \quad y - a = r' \cos \theta_1.$$

En éliminant θ_1 entre ces équations, il vient

$$\left(\frac{x - \alpha}{r' - r_1} \right)^2 + \left(\frac{y - a}{r'} \right)^2 = 1,$$

qui représente une ellipse si $r' > \frac{r_1}{2}$, un cercle si $r' = \frac{r_1}{2}$, le centre est toujours le point (α, a) situé sur la verticale

où se meut le centre de gravité G : si $r' > \frac{r_1}{2}$, le grand axe de l'ellipse est parallèle à Oy, et si $r' < \frac{r_1}{2}$, il est parallèle à Ox.

v désignant la vitesse absolue de M' à la fin du temps t , on déduit des équations (8) et (10)

$$v = \sqrt{2gr_1 [r'^2 - r_1 (2r' - r_1) \cos^2 \theta_1] \cdot \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1}};$$

ainsi cette vitesse, nulle pour $\theta_1 = \pm \theta_0$, prend la même valeur pour deux valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro, et atteint son maxima $\pm 2(r' - r_1) \frac{\sqrt{gr_1}}{k} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2}$ pour $\theta_1 = 0$.

Donc

Le point M' oscille sur un arc d'ellipse ou de cercle, formé de deux parties symétriques par rapport à la verticale du centre de gravité, et ces oscillations isochrones, de durée T, coïncident avec les autres.

Il ne reste plus à chercher que la pression exercée par le cylindre sur le plan horizontal. Soient,
 p cette pression à la fin du temps t ,
 P le poids du cylindre.

On a (I)

$$p = \frac{P}{mg} \cdot f,$$

et, en remplaçant f par sa valeur en fonction de θ_1 tirée des équations (2, 5, 7, 8),

$$p = Pk^2 \left[\frac{1}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1} + \frac{2r_1^2 \cos \theta_1 \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta_0)}{(k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1)^2} \right].$$

On voit que p augmente de

$$P \cdot \frac{k^2}{k^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_0} \quad \text{à} \quad P \cdot \left(1 + 4 \frac{r_1^2}{k^2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right),$$

tandis que θ_1 varie de $\pm \theta_0$ à zéro, et prend la même valeur pour deux valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro.

Notes.

I. On peut arriver aux équations (1) et (4), sans appliquer la force f au cercle, afin de le considérer ensuite comme libre. Les composantes des forces perdues sont seulement ainsi

$$-\mu \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad -\mu \left(g + \frac{d^2 y}{dt^2} \right),$$

pour l'élément (x, y) de masse μ : et on doit avoir

$$\Sigma. \mu \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \left(g + \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y \right] = 0,$$

$\delta x, \delta y$ étant liées par la condition que le cercle touche toujours le plan horizontal. Or 1° pour un déplacement virtuel horizontal, $\delta x = \text{const.}$, $\delta y = 0$, ce qui fournit l'équation (1); 2° pour un déplacement virtuel dans lequel le cercle tournerait de l'angle infiniment petit ω autour de son centre C,

$$\delta x = (a - y) \omega, \quad \delta y = (x - x') \omega,$$

ce qui fournit l'équation (4) en ayant égard à l'équation (1).

II. Si le plan est incliné au lieu d'être horizontal, en y posant le cylindre de manière que ses arêtes soient horizontales, ce qui a été dit dans l'article I subsiste, pourvu que l'on considère un cylindre formé de filets homogènes aussi bien dans la première partie du raisonnement que dans la seconde.

λ désignant l'angle d'inclinaison du plan, et l'axe des x étant une ligne de pente dirigée de haut en bas, on a, au lieu des équations (1), (2) et (3),

$$mg \sin \lambda - \Sigma. \mu \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

$$f - mg \cos \lambda - \Sigma. \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

$$x' f - mg(x_1 \cos \lambda + y_1 \sin \lambda) + \Sigma. \mu \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0.$$

Le mouvement du centre de gravité parallèlement au plan est uniformément accéléré et déterminé par

$$x_1 = \alpha + \frac{1}{2} g t^2 \sin \lambda.$$

Les équations (6) et (8) sont remplacées par des équations qui diffèrent seulement de celles-là en ce que $g \cos \lambda$ s'y trouve au lieu de g ; par conséquent, la partie de la discussion contenue dans l'article III (1°) sur le mouvement angulaire du cylindre autour de son axe subsiste, à cela près que la durée des oscillations est réduite à $T \sqrt{\cos \lambda}$.

x' est donnée par l'équation

$$x' = \alpha + \frac{1}{2} g t^2 \sin \lambda - r_1 \sin \theta_1,$$

ainsi cette abscisse du point C croîtra indéfiniment, et l'axe du cylindre n'oscille pas de la manière indiquée dans l'article III (2°). Cependant x' peut décroître au commencement, lorsque θ_1 passe de $-\theta_0$ à θ_0 , car on a

$$\frac{dx'}{dt} = gt \sin \lambda - r_1 \cos \theta_1 \frac{d\theta_1}{dt},$$

et $r_1 \cos \theta_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt}$ (qui est positif avec $d\theta_1$) peut surpasser $gt \sin \lambda$; cela ne se présentera plus et x' sera constamment croissante, après que t aura atteint $\frac{2 r_1}{k \sin \lambda} \cdot \sqrt{\frac{r_1 \cos \lambda}{g}} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2}$ qui est le maximum de $\frac{r_1 \cos \theta_1}{g \sin \lambda} \cdot \frac{d\theta_1}{dt}$. Quand x' décroît, le cylindre remonte le plan incliné.

L'équation (9) n'est pas modifiée, et, par conséquent, le centre de gravité G a, sur la droite mobile représentée par l'équation (11), le mouvement décrit dans l'article III (3°); la durée des oscillations est encore réduite à $T\sqrt{\cos \lambda}$.

Enfin, un point M' du rayon CG ne se meut plus sur une ellipse fixe (III, 4°), mais sur une ellipse qui glisse parallèlement à O x dans le plan x Oy, sans changer de forme ni de grandeur, et dont le centre suit le point d'intersection des droites représentées par les équations

$$x = \alpha + \frac{1}{2} g t^2 \sin \lambda, \quad y = a.$$

Rectification à la page 33.

Au lieu des lignes de 4 à 7 en descendant, lisez :

Dans ce cas, le point D atteint en descendant la position déterminée par cette valeur de γ ; puis il remonte ensuite, et il faut considérer le signe — dans le second membre de l'équation (4).

Et, au lieu des quatre dernières lignes, lisez :

D, en remontant, finit par atteindre la position déterminée par la valeur $[\alpha]$ de γ ; puis il redescend, et l'on doit alors considérer le signe + dans le second membre de l'équation (4).

Dans ce cas, comme dans le précédent, le mouvement est oscillatoire, du moins après la première excursion.